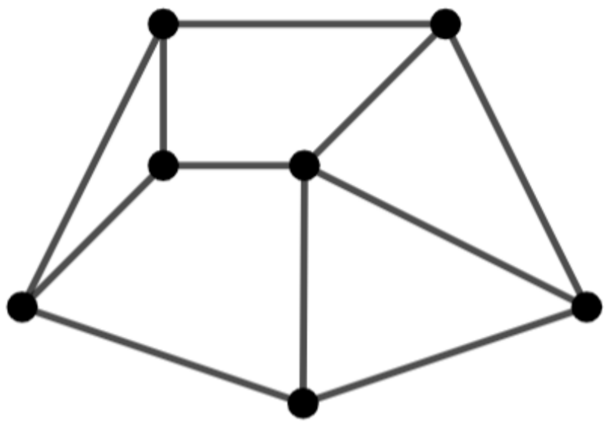
Řešení Třetí Série

Úloha 1. *Doplňte k uvedeným posloupnostem následující členy. Zdůvodněte, podle jakého pravidla jste postupovali.*

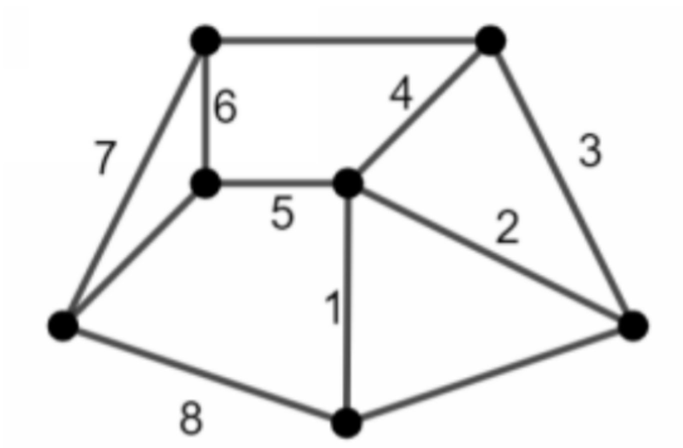
1. 1 1 2 3 4 6 9 13 19 28 ?
2. 0 2 5 10 17 28 ?
3. 4 6 9 10 14 15 ?

1. 41, Je to podobné jako Fibonacciho posloupnost, kde pro každý člen platí, že je součtem předchozích dvou, zde je součtem posledního a předpředposledního.
2. 41, přičítají se prvočísla
3. 21, je to řada čísel, které jsou součinem dvou prvočísel (mohly by se nazývat druhočísla :))

Úloha 2. *Určete, kolik nejvíce hran (zobrazených na obrázku) jsme schopni projít tak, aby se každou prošlo právě jednou a start i konec byl ve stejném vrcholu.*



Je šest vrcholů s lichým počtem hran, tudíž maximální počet bude $11 - \frac{6}{2} = 8$.



Úloha 3. *Dokažte, že strany libovolného trojúhelníku a, b, c, splňují následující nerovnost:*

$$c(c-1)+(a+b)(a+b+1)\geq 0$$

Rovnici upravíme na $c^2+a^2+2ab+b^2+a+b-c\geq 0$. $c^2+a^2+2ab+b^2$musí být větší než nula. A $a+b-c\geq 0$, protože platí trojúhelníková nerovnost. Takže celá nerovnost musí platit.

Úloha 4. *V jazyce otito platí, že podstatným jménem je libovolné slovo složené z písmen horního řádku klávesnice (qwertzuiop), které je palindromem (slovo, které se čte stejně zepředu i zezadu) a zároveň pro něj platí, že se střídají samohlásky a souhlásky (nemohou být dvě samohlásky ani dvě souhlásky vedle sebe). Jaká je pravděpodobnost, že napíšeme nějaké podstatné jméno v jazyce otito, když po sobě zmáčkneme náhodných 5 kláves v horním řádku klávesnice. (Pravděpodobnost počítáme jako poměr příznivých situací – počet podstatných jmen, co můžeme vytvořit ku počtu všech situací – všech „slov“, co můžeme napsat.)*

Rozdělíme si slova na dva případy – na ty, co začínají na samohlásky a na ty, co začínají na souhlásky. V horním řádku klávesnice jsou 4 samohlásky a 6 souhlásek.

Začínají na samohlásky: Na první pozici můžu dosadit 4 samohlásky, na druhou 6 souhlásek, na třetí 4 samohlásky (pak se již písmena opakují – palindrom) – tedy $4\cdot 6\cdot 4=96$ podstatných jmen.

Začínají na souhlásky: Na první pozici můžu dosadit 6 souhlásek, na druhou 4 samohlásky, na třetí pozici 6 souhlásek – tedy $6\cdot 4\cdot 6=144$ podstatných jmen. Dohromady $96+144=240$ podstatných jmen.

Náhodným zmáčknutí můžeme vytvořit 10^5 slov - na každé z pěti pozic máme deset možností písmen. Pravděpodobnost je tedy $\frac{240}{10^5}=0,0024=0,24\%$.

Úloha 5. *Máme obdélníkovou zahradu, jejíž jedna strana je dvakrát delší než druhá. Někde uvnitř této zahrady je zabodnutý kůl a od něj vedou 4 lana, každý do jiného rohu zahrady, rozdělující tak zahradu na 4 trojúhelníky. Jeden z těchto trojúhelníků má obsah $400\ \mathrm{m}^2$, protější trojúhelník – to znamená, že mají společný jen jeden bod a to kůl – má obsah $500\ \mathrm{m}^2$. Urči rozměry zahrady.*

Označme výšku menšího trojúhelníka y, pak výška druhého trojúhelníka musí být $x-y$. Obsah menšího známého trojúhelníku spočítám jako:

$$S_1=\frac{2xy}{2}$$

Obsah většího známého trojúhelníka spočítám jako:

$$S_2=\frac{2x(x-y)}{2}=\frac{2x^2-2xy}{2}$$

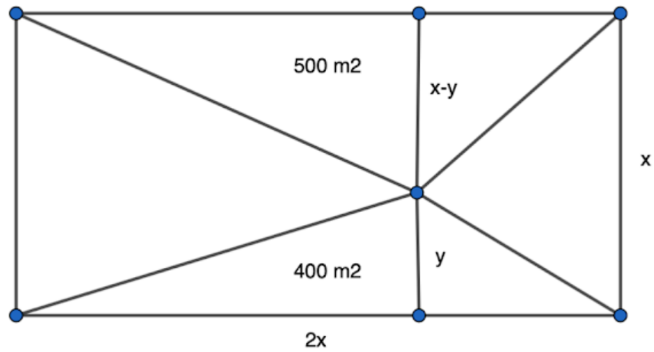
Dohromady

$$S=S_1+S_2=\frac{2xy}{2}+\frac{2x^2-2xy}{2}=\frac{2x^2}{2}$$

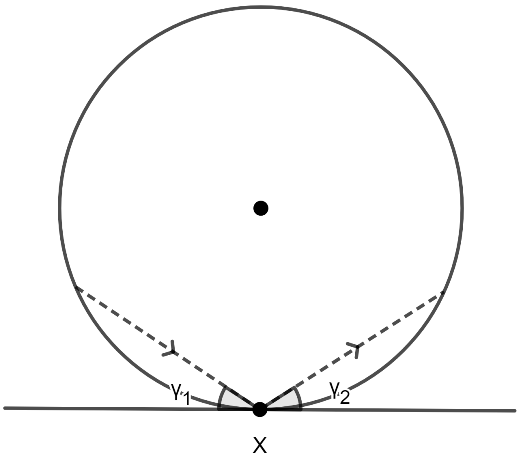
Což je polovina obsahu celé zahrady, celá zahrada má tedy plochu 1800 m^2:

$$S_z=1800=2x^2$$

Tedy $x = 30m$, rozměry zahrady budou 30 m a 60 m. Uvědomme si, že pokud by trojúhelníky měly základnu dlouhou $2x$ výpočty budou stejné. I v tomto případě totiž budou trojúhelníky zabírat polovinu plochy zahrady.



Úloha 6. *Mějme kruh, ve kterém je vystřelen paprsek. Paprsek se odráží pouze od obvodové kružnice, a to tak, že velikost úhlu odrazu je rovna velikosti úhlu dopadu (úhel je měřen vzhledem k tečně vedené bodem dopadu) a samozřejmě se neodráží přímo zpět (pokud není vystřelen od středu). V jeden okamžik dopadl paprsek na obvod v bodě X pod úhlem γ. Najděte množinu Γ všech γ takových, že se paprsek za konečný čas vrátí zpět do bodu X. (popište vlastnosti takového úhlu γ)*



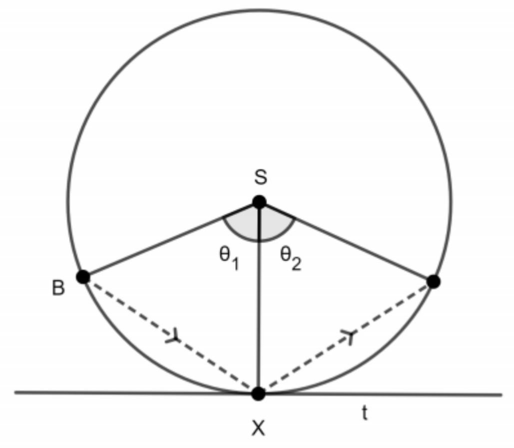
Paprsek usekne kruhu vždy shodnou kruhovou úseč, tedy i příslušnou výseč svírající úhel θ. Tento úhel je dvojnásobkem úhlu γ, což lze lehce dokázat pomocí kolmosti $SX \perp t$ a rovnoramennosti $\triangle BSX$.

Aby se mohl paprsek vrátit do bodu X, musí existovat nějaká $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $m \cdot \theta = n \cdot \circ$, kde $\circ$ značí velikost plného úhlu. Z toho plyne vztah:

$$\gamma = \frac{n}{2m} \cdot \circ,$$

tedy γ musí být racionálním násobkem plného úhlu. Měli bychom se však vyvarovat nulového násobku, neboť pak by paprsek přicházel z vnějšku kruhu, což nelze. Požadavky ze zadání tedy splňují právě ty úhly γ ve tvaru:

$$\gamma = q \cdot \circ, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad q \in \left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right),$$



neboť γ musí být určitě menší než 180° a nenulová. Řešení postačí v tomto tvaru, chceme-li použít nějaké konkrétní úhlové jednotky a zapsat množinu ultrakorektně např. v radiánech, můžeme psát

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \gamma = 2\pi q,\ q \in \mathbb{Q},\ q \in \left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right) \right\},$$

případně lze dosadit i ve stupních $\circ = 360°$.

Úloha 7. *Najděte X takové, že v $\mathbb{R}$ splňuje následující rovnici:*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^L = 0,$$

kde L je liché přirozené číslo.

Připomeňme si, že v oboru reálných čísel je kvadrát vždy nezáporný. Alespoň polovina členů na levé straně rovnice je tedy nesporně nezáporná. Zachovejme tyto členy na levé straně a zbytek převeďme doprava:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{L-1} &= -x - x^3 - x^5 - \ldots - x^L \\ 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{L-1} &= -x \cdot (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{L-1}). \end{aligned}$$

Je výhodné na pravé straně vytknout $-x$. Dostáváme tak na obou stranách shodný člen, kterým bychom rádi podělili. To však můžeme jen tehdy, pokud je nenulový. Jeho nulovost by znamenala splnění rovnosti

$$x^2 + x^4 + \cdots + x^{L-1} = -1,$$

která díky sudým mocninám na levé straně nikdy nenastane. Dostáváme tedy $1 = -x$, což po dosazení skutečně vyhovuje. Nezbývá nic jiného než zvolat *hurá* a psát $\mathbb{K} = \{-1\}$.