Řešení První Série

Úloha 1. *Doplňte do tabulky právě 17 Očí (prázdné kolečko) tak, aby každé Oko mělo přiřazeno právě jednoho Občana (černé kolečko), který žádné jiné oko přiřazené nemá. Členové každé z vzniklých 17 dvojic Oko - Občan spolu navíc musí sousedit hranou a žádné dvě Oči spolu nesmí sousedit hranou ani rohem. Pro některé řádky a sloupce je zadán počet Očí.*

Je jediné možné řešení, a to následující:

			K	•			K		← 2
K	•			•	K		•		
			K				K		← 2
K			•				•	•	
•			•	K		K		K	← 3
K	•	K	•			•			
	•			K		•			← 1
	K		•	•		K		K	
			K					•	← 1
			↑ 3	↑ 2	↑ 1				

(K jako oKo. :))

Úloha 2. *Najděte číslo t, jehož trojnásobek je nejmenším násobkem* 64*, který je dělitelný číslem* 30.

$$t = \frac{\mathrm{NSN}(64, 30)}{3} = \frac{960}{3} = 320 \tag{1}$$

Úloha 3. *Zavedeme pojem „sudost“ čísla, což bude největší mocnina čísla 2, kterými je číslo dělitelné. (Sudost čísla 12 je 2, protože nejvyšší mocnina 2, která dělí 12 je číslo 4.) Mějme číslo 1680. Kolik má nejsudějších dělitelů? Rozuměj dělitelů, které jsou dělitelné nejvyšší mocninou dvojky mezi všemi jeho děliteli. (Číslo 12 a 20 je stejně sudé).*

$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, tedy nejsudější čísla jsou ta, co mají 2^4. Dále zjistíme všechny kombinace jeho dělitelů, které mají v rozkladu na prvočísla 2^4, snadno vidíme, že to jsou čísla $2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 5, 2^4 \cdot 7, 2^4 \cdot 3 \cdot 5, 2^4 \cdot 3 \cdot 7, 2^4 \cdot 5 \cdot 7$ a $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, tedy jich je 8.

Úloha 4. *Popište, jak musí vypadat přirozené číslo A, jehož dekadický zápis se skládá pouze z 0 a 1, a které zároveň končí na 1, kterým když vynásobíme číslo 101, dostaneme opět číslo, jehož dekadický zápis se bude skládat pouze z 0 a 1. K tomu najděte všechna n pro která neexistuje žádné takové n-ciferné číslo A. (n-ciferné číslo má právě n cifer a první z nich není 0).*

Čísla na sudých a lichých pozicích se díky nule uprostřed navzájem vůbec neovlivňují. Můžeme se tedy na hledaná čísla dívat jako na nezávislé řetězce čísel na sudých a lichých pozicích.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ + & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\ \hline \\ & 1 & & 1 & & \dots & & 1 & & 1 \end{array}$$

Pojďme se podívat, co musí takový řetězec splňovat: ten lichý musí začínat na 1 následovanou 0, pro řetězec obsahující poslední číslici musí platit, že končí na 1, předposlední je 0. Když si rozepíšeme násobení takovým číslem pod sebe, zjistíme, že jediná podmínka pro další číslice v řetězcích je: dvě jedničky v řetězci nemůžou být vedle sebe, protože v takovém případě by se jednička, vzniklá násobením té první jedničky, sečetla s jedničkou, která vznikne násobením té druhé jedničky, a vznikne dvojka, kterou ve výsledku nemůžeme mít.

Jediným n, pro které neexistuje takové n-ciferné číslo je $n = 3$, neboť lichý řetězec v tomto případě nemůže splnit podmínku, že nejsou dvě jedničky vedle sebe, protože musí končit i začínat na 1, jinak by to nebylo trojciferné číslo.

Úloha 5. *Do místnosti vede sedm dveří, označené čísly $1-7$. Čtyřmi se vchází $(1-4)$, třemi se vychází $(5-7)$. Poté, co jedněmi dveřmi projde člověk, ty dveře okamžitě zmizí – to znamená, že jedněmi dveřmi může projít maximálně jeden člověk. Zjistěte, kolik má možností dvojice na vejití a zase vyjití z této místnosti, kde samozřejmě jsou dvě různé situace, když první člověk vejde 1 a odejde 5, druhý člověk vejde 2 a odejde 6, oproti situaci, když první člověk vejde 2 a odejde 6 a ten druhý vejde 1 a odejde 5 – (záleží na pořadí).*

První člověk má 4 možnosti, kudy vejít, druhý člověk má pak už jen 3 možnosti, kudy vejít. To dělá $4 \cdot 3 = 12$ způsobů jen na vejití. První člověk má 3 možnosti, kudy vyjít, druhý člověk má pak už jen 2 možnosti, kudy vyjít. To dělá $3 \cdot 2 = 6$ způsobů jen na vyjití. Dohromady $6 \cdot 12 = 72$ způsobů.

Úloha 6. *VP má trojmístný PIN, ale zapomněl ho. Jediné, co ví, je, že PIN obsahoval číslice 6 a 4, pro která platilo, že 6 byla určitě před 4. Jaká je pravděpodobnost, že trefí ten správný PIN hned na první pokus? (Pravděpodobnost počítáme jako počet příznivých situací – ten správný PIN – ku počtu všem situacím – všem možným PINům, které odpovídají podmínkám.)*

To znamená, že 6 může být na první nebo na druhé pozici, 4 na druhé nebo třetí.

Pokud bude 6 na první pozici a 4 na druhé, máme 10 možností, co doplnit na poslední místo.

Pokud bude 6 na první pozici a 4 na třetí, máme 9 možností, co doplnit na poslední místo (všechny číslice až na 4, protože pak by vzniklo 644 a to už je zahrnuto v předchozí možnosti).

Pokud bude 6 na druhé pozici musí být 4 na třetí pozici, na první místo můžeme doplnit 9 číslic (PIN kód může klidně začínat 0, ale možnost 664 už je v předchozí možnosti).

Různých pinů, které by odpovídaly zadání tedy je $10 + 9 + 9 = 28$. Správný PIN můžeme odhalit na první až dvacátý osmý pokus. Pravděpodobnost spočítáme jako podíl příznivých situací ku všem situacím, tedy: $\frac{1}{28}$.

Úloha 7. *Číslo n je liché přirozené číslo, které je dělitelné 3. Odebereme z něj poslední cifru a vzniklé číslo m je stále dělitelné 3. Najděte všechna n, která jsou druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, pokud víte, že m není dělitelné 9.*

$i, j, k \in \mathbb{N}$

Aby bylo číslo dělitelné 3, musí být jeho ciferný součet dělitelný 3, součet cifer n tedy bude ve tvaru $3i$. Součet cifer m bude zase ve tvaru $3j$. Jejich rozdíl (poslední cifra) tedy bude $3(i - j)$. Z toho vyplývá, že poslední cifra musí být dělitelná 3. Dělitelné 3 jsou pouze cifry 0, 3, 6 a 9. Číslo n tedy může končit pouze na jednu z těchto cifer.

Číslo n nemůže končit na cifru 0 ani 6, protože by nebylo liché. Aby bylo n druhou mocninou a zároveň dělitelné 3, musí být dělitelné i 9, tj. jeho ciferný součet je dělitelný 9. Můžeme tedy říct, že ciferný součet n je $9k$. Aby poslední cifra čísla n byla 9, musí být ciferný součet $m = 9(k - 1)$, nebo-li m musí být dělitelné 9. To ale víme ze zadání, že neplatí a dostali jsme tedy spor.

Jedinou cifru, kterou můžeme uvažovat jako poslední v čísle n je tedy 3. Takové n ale neexistuje, jelikož žádná druhá mocnina nekončí na cifru 3. Vliv na hodnotu poslední cifry druhé mocniny nějakého čísla, má totiž pouze poslední cifra tohoto čísla, stačí tedy zjistit druhé mocniny všech jednociferných čísel. Těch je 10:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$
$$2 \cdot 2 = 4$$
$$3 \cdot 3 = 9$$
$$4 \cdot 4 = 16$$
$$5 \cdot 5 = 25$$
$$6 \cdot 6 = 36$$
$$7 \cdot 7 = 49$$
$$8 \cdot 8 = 64$$
$$9 \cdot 9 = 81$$

Ani jedna z možností nekončí na cifru 3, nebude tedy existovat ani žádné n končící na tuto cifru.

Neexistuje žádné přirozené číslo n, které by splňovalo zadané podmínky.