Řešení Čtvrté Série

Úloha 1. *Doplňte do následující tabulky čísla 1-4 tak, aby v každém sloupci i řádku bylo každé číslo právě jednou a zároveň aby platilo, že čísla na okrajích tabulky byla čísla nejblíže kraji v daném sloupci/řádku.*

	1	2	3	4	4	3	
1							4
1							3
2							1
3							4
4							2
4							2
	4	4	2	1	3	2	

Tabulka má práve jedno správné řešení, a to následující:

	1	2	3	4	4	3	
1	1	2	3	4			4
1			1	2	4	3	3
2	2	3	4			1	1
3	3		2		1	4	4
4	4	1		3	2		2
4		4		1	3	2	2
	4	4	2	1	3	2	

Úloha 2. *Nalezněte všechna přirozená čísla a, b splňující:*

$$a + b = p^2$$

$$ab = 2p^2,$$

kde p je prvočíslo.

Všimněme si, že součin je roven dvojnásobku součtu čísel a, b, tedy že

$$ab = 2(a + b)$$

Rovnost by se nám hodila napsat do součinového tvaru, neboť pracujeme si přirozenými čísly. Upravujme:

$$\begin{aligned} a(b-2) - 2b &= 0 \\ a(b-2) - (b-2) &= 2 \\ (a-1)(b-2) &= 0 \end{aligned}$$

V druhém kroku jsme přičetli k oběma stranám 2, abychom mohli vytknout společného činitele. Z poslední rovnosti vidíme, že musí být $a = 1$ nebo $b = 2$.

Dosadíme-li $a = 1$ do druhé z původních rovností, dostaneme, že $b = 2p^2$. Potom však $a + b = 1 = 2p^2 > p^2$, a proto pro $a = 1$ neexistuje vhodné b.

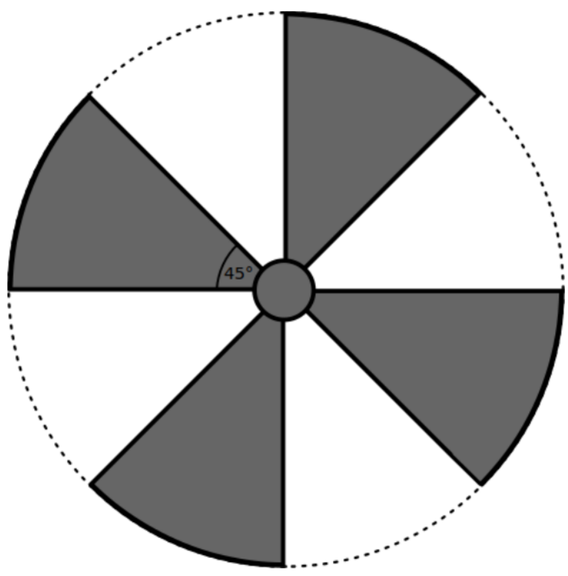
Obdobně uvažme případ $b = 2$. Potom $a = p^2$, ovšem $p^2 + 1 > p^2$.

Úloha tedy nemá žádné řešení.

Úloha 3. *Na čtverečkovaném poli 10×10 stojí v obou dolních rozích figurky. Mohou se pohybovat rovně do všech osmi směrů, ale jen přesně o dvě políčka. Jestliže se po jednom tahu střídají, mohou se někdy potkat?*

Když si pole obarvíme stejně jako šachovnici, zjistíme, že figurky stojí na odlišných barvách. Pohyb rovně do všech stran pro ně znamená posun na stejnou barvu, na které stály. Stejně tak pohyb šikmo nikdy barvu nezmění. Pohybují se tedy pouze po své Počáteční barvě a tedy se nikdy potkat nemohou.

Úloha 4. *Větrák má 4 stejné lopatky (viz obrázek) tvořící kruhové výseče s úhlem* $45°$. *Mezi nimi jsou 4 stejně velké mezery. Větrák se otáčí rychlostí 13 otáček za sekundu. Carlos je šikovný a dokáže do něj strčit ruku právě na jednu setinu sekundy. Jaká je pravděpodobnost, že se nezraní, když takto učiní v náhodnou chvíli?*

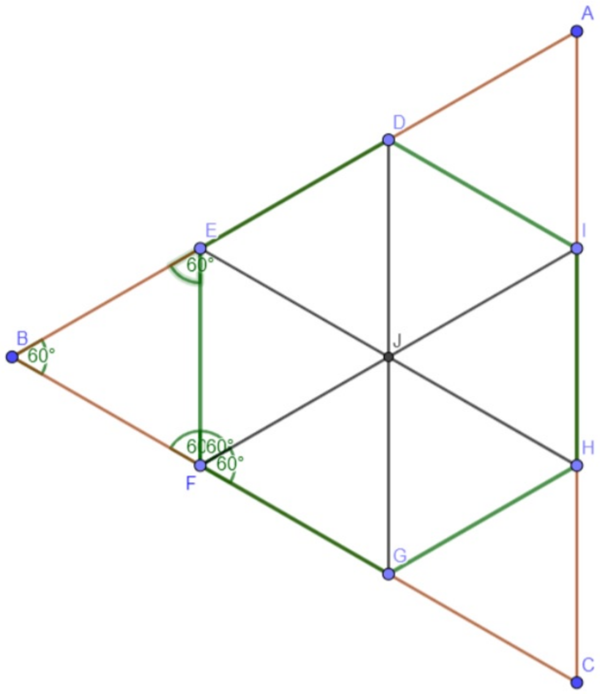


Každá výseč lopatky má ze zadání úhel 45°. Zbývá tedy $360° - (4 \cdot 45) = 180°$ na mezery. Jsou čtyři a stejně velké, tudíž má každá taktéž $\frac{180}{4} = 45°$. Tedy jedna mezera, ve které se musí ruka na dobu jedné setiny udržet je $\frac{1}{8}$ kruhu. Pravděpodobnost není nutno počítat, protože lze jednoduše zjistit, že $\frac{13}{100} = 0,13$, tzn. taková část z celé kružnice přijde do kontaktu s rukou. Vzhledem k tomu, že velikost mezery $(\frac{1}{8})$ je v desetinných číslech 0,125, není šance aby nedošlo k zranění protože $0{,}13 > 0{,}125$.

Pravděpodobnost nezranění je tedy 0%.

Pozn. I kdyby velikost mezery odpovídala přesně, musíme zohlednit tloušťku ruky a to, že by i tak došlo k její celkové amputaci. I s dostatečnou rezervou pro ruku ovšem tuto činnost nedoporučujeme, pravděpodobnost sice není nulová, ale stoprocentní také ne, nehledě na to, že stále operujeme s velice pochybným časem jedna setina.

Úloha 5. *Jaký je obsah největšího pravidelného šestiúhelníku, který můžeme vepsat rovnostrannému trojúhelníku o straně 6?*



Pravidelný šestiúhelník se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků. Vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku jsou rovny 60°. Protože úhly EFJ a JFG mají dohromady 120°, tak se úhel EFB musí rovnat $180° - 120° = 60°$, stejně jako úhel BEF a pak i EBF. Trojúhelníky BEF a EJF jsou rovnostranné a tudíž podobné, protože ale mají stejnou stranu (EF), tak jsou dokonce shodné. Můžeme si tímto způsobem rozdělit velký trojúhelník ABC na 9 menších rovnostranných shodných trojúhelníků. Obsah největšího pravidelného šestiúhelníku, který takto můžeme vepsat do rovnostranného trojúhelníku bude roven obsahu rovnostranného trojúhelníku. Výška v rovnostranném trojúhelníku je rovna délky strany. Obsah rovnostranného trojúhelníka tedy spočítám jako: . Obsah šestiúhelníka tedy bude .

Úloha 6. *Určete nejmenší x takové, pro které platí, že 2020 dělí počet dělitelů* 2020^x.

Aby bylo číslo dělitelné 2020, musí být dělitelné 4, 5 a 101. ($2020=2^2 \cdot 5 \cdot 101$). Jelikož počet dělitelů libovolného přirozeného čísla vypočteme jako součin exponentů zvětšených o 1, když máme číslo rozložené na prvočinitele, počet dělitelů 2020^x zjistíme jako součin $(2x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$. Všimněme si, že číslo $(2x+1)$ je vždy liché, pak tedy aby byl tento součin dělitelný 4, musí být $(x+1)$ sudé, z čehož plyne, že x musí být liché. Následně máme 4 možnosti:

1. $(2x+1)$ je dělitelné i 5 i 101. Pak musí být dělitelné 505. Najdeme tedy nejmenší číslo tvaru $(2x+1)$ splňující tuto podmínku a zároveň aby x bylo liché. Nejmenší takové číslo je 1515, pak je $x=757$.
2. $(x+1)$ je dělitelné i 5 i 101. Pak musí být dělitelné 505. Najdeme tedy nejmenší číslo tvaru $(x+1)$ splňující tuto podmínku a zároveň aby x bylo liché. Nejmenší takové číslo je 1010, pak je $x=1009$.
3. $(x+1)$ je dělitelné 5 a $(2x+1)$ je dělitelné 101. Aby bylo x liché a zároveň $(x+1)$ dělitelné 5, musí mít x na pozici jednotek 9. Pak bude mít $(2x+1)$ na pozici jednotek 9. Hledáme tedy nejmenší číslo tvaru $(2x+1)$ dělitelné 101 tak, aby mělo na pozici jednotek 9 a zároveň x také mělo na pozici jednotek 9. Nejmenší takové číslo je 1919, pak je $x=959$.
4. $(x+1)$ je dělitelné 101 a $(2x+1)$ je dělitelné 5. Aby bylo $(2x+1)$ dělitelné 5, musí mít x na pozici jednotek 7. Pak bude mít $(x+1)$ na pozici jednotek 8. Hledáme tedy nejmenší číslo tvaru $(x+1)$ dělitelné 101 splňující všechny již řečené podmínky. Nejmenší takové číslo je 808, pak je $x=807$.

Nejmenší z těchto čísel je 757, což je tedy naším hledaným x.

Úloha 7. *Ukažte, že součin obvodu a obsahu libovolného trojúhelníku je menší než 3/2 objemu krychle s délkou hrany rovnou délce libovolné strany trojúhelníku.*

Mějme trojúhelník ABC s délkami stran a, b, c a $a \geq b \geq c$. Potom obvod $o = a + b + c$. Dále buď S obsah trojúhelníku. Z našeho předpokladu o délkách stran můžeme psát, že

$$oS = (a + b + c)S \leq 3aS$$

Ve výrazu nám ještě překáží obsah. Ten si můžeme vyjádřit pomocí výšky v_a na stranu a jako $S = av_a/2$. Takže

$$oS < a^2 \cdot \frac{3v_a}{2}$$

Nyní ukážeme, že $v_a < a$. Nechť P je pata výšky na stranu a. Pak strany b, c jsou přeponami s v trojúhelnících CPA, BPA, a proto $v_a < c \leq b \leq a$. Takže jsme dostali, že

$$oS < \frac{3}{2}a^2 \cdot a < 2a^3.$$

Protože a je nejdelší stranou, je tím úlohu hotova.