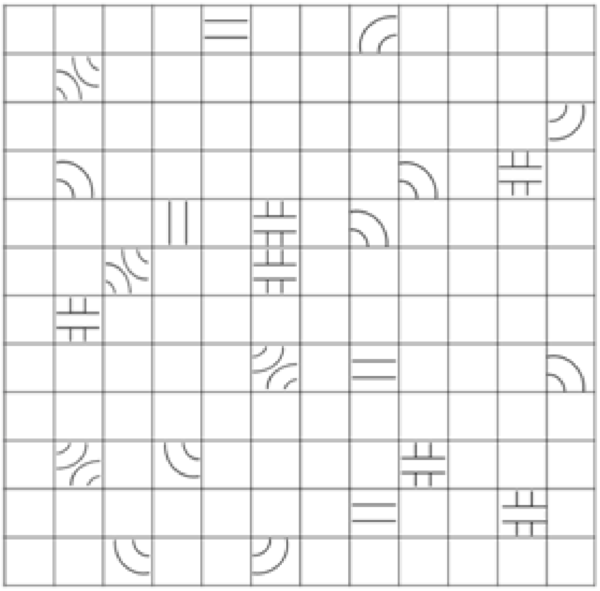
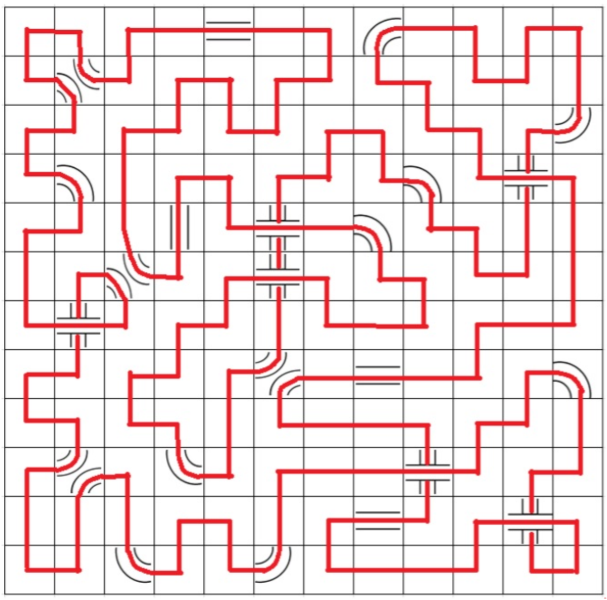
# Řešení Třetí Série

**Úloha 1.** *Liána se plazí po zemi tak, že jediným stonkem, který nemá viditelný konec ani začátek (představ si jako uzavřenou křivku) zabírá právě všechna čtvercová políčka na obrázku. Zároveň všechna místa, kde prochází vícekrát jedním políčkem, jsou vyznačena. Nakresli do tabulky tuto liánu.*



Existuje pouze jedno správné řešení, a to následující:



**Úloha 2.** *Pro dvě prvočísla $p$ a $q$ platí $p^3 + q^2 = 10209$, urči obě prvočísla.*

Všimneme si, že 10209 je liché číslo. Když umocníme liché číslo, bude stále liché. Součet lichých čísel je sudý. To znamená, že jedno z hledaných prvočísel musí být sudé, aby byl součet lichý. Samozřejmě jediné sudé prvočíslo je 2. Nyní stačí dosadit za jednu nebo druhou neznámou a hned zjistíme, že $p \neq 2$, neboť by to znamenalo, že $q^3 = 10205$, což je číslo očividně dělitelné pěti, čímž pádem by prvočíslo $q$ muselo být 5 a $125 \neq 10205$. Víme tedy, že $q = 2$. Nakonec jen rozložíme zbylé číslo $10201 = p^2$ na součin prvočísel a zjistíme, že $10201 = 101 \cdot 101$, což vyhovuje naším podmínkám. Prvočísla jsou tedy 2 a 101.

**Úloha 3.** *Pája chce shrabat své pole. Její pole je rozděleno do menších částí, takže si celé pole můžeme představit jako klasickou šachovnici 8×8. Jako jaké šachové figurky se může pohybovat, aby pokryla (shrabala) celé pole? Pája začíná v levém dolním rohu a může vstoupit na každé pole vícekrát.*

Zřejmě se Pája nemůže pohybovat jako pěšák, neboť se nedostane do dalších sloupců. Může se naopak jistě pohybovat jako věž, královna a král. Zbývá vyřešit střelce a koně.

Střelec začíná na pozici $(1, 1)$. Protože se pohybuje po úhlopříčkách, vždy budou buď obě souřadnice liché nebo sudé, takže se nemůže dostat například na pole $(2, 3)$.

Pro koně existuje několik variant, jak se může pohybovat. Například může pokrýt vždy celý jeden sloupec postupným otáčením a na jeho konci (na vrchu či spodu) se může otočit a pokračovat na další sloupec. Tak pokryje jistě celé pole.

Odpověď: Pája může orat jako kůň, věž, král a královna.

**Úloha 4.** *Pro otevření brány potřebujeme zjistit hodnoty součtu a+b+c+d, pro než platí:*

$$ab + bc + cd + da = 15,$$

*a zároveň jsou všechna čtyři čísla přirozená.Najděte všechny možné hodnoty výrazu a+b+c+d.*

Můžeme si všimnout, že ab+bc+cd+dc=(a+c)(b+d)= 15 a protože jsou to přirozená čísla, musí se bud a+c=3 a b+d=5 nebo naopak (15=5x3). Tedy součet výrazu a+b+c+d je vždy roven 3+5=8.

**Úloha 5.** *Najděte reálná čísla x a y, jestliže platí:*

- $x < y$
- $xy^2 = 64$
- $\frac{4x+2y+5}{2} = \frac{4x+10}{4}$

Poslední rovnici upravíme ekvivalentně na tvar $x = -y$. Z nerovnice vyvodíme, že $x$ je záporné a $y$ kladné. Z toho ale vyplývá, že $xy^2 < 0$ a tím za pomoci druhé rovnice dostáváme, že neexistují žádná reálná čísla $x, y$, která splňují zadané podmínky.

**Úloha 6.** *Mějme pětiúhelník se stranou x a 5 kružnic s poloměrem x se středy v jeho vrcholech. Určete obvod celého útvaru.*

Libovolné dva vrcholy pětiúhelníku spolu s průsečíkem kružnic v jejich středech vně pětiúhelníku tvoří rovnostranný trojúhelník. zároveň vnitřní úhel u každého vrcholu je 108°. Z každé kružnice musíme započítat oblouk odpovídající úhlu 360-(60+108+60)=72. A dále $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$

Tudíž obvod celého útvaru bude $2 \cdot x \cdot \pi$

**Úloha 7.** *Mějme pravidelný n-úhelník s 2020 vrcholy. Jeho vrcholy označme po řadě $x_1$ až $x_{2020}$. Určete součet velikostí konvexních úhlů $|\sphericalangle x_{849}x_{307}x_{17}|$ a $|\sphericalangle x_{17}x_{1317}x_{849}|$.*

Nejprve je třeba si uvědomit, že jakékoli dva body, jejichž index se liší o 1010, jsou protější. Můžeme tedy říci, že to platí i pro body $x_{307} a x_{1317}$ . Z toho také vyplývá, že kružnice opsaná našemu mnohoúhelníku je zároveň kružnicí Thaletovou nad úsečkou $x_{307}x_{1317}$ . Vezmeme-li v potaz čtyřúhelník $x_{17}x_{307}x_{849}x_{1317}$ , můžeme součet našich úhlů vyjádřit jako $360^\circ-(|\sphericalangle x_{307}x_{849}x_{1317}| + |\sphericalangle x_{1317}x_{17}x_{307}|)$. Díky tomu, že body $x_{849} a x_{17}$ leží na Thaletově kružnici, víme, že součet úhlů u těchto bodů bude $90^\circ$, tedy můžeme dosadit: $360^\circ$˘$(90^\circ + 90^\circ)$. Součet požadovaných úhlů je tím pádem $180^\circ$.