Řešení 2. série

Úloha 1. *Pro vyléčení pacienta otráveného jedem je nutné připravit lék, ve kterém je obsažen protijed, ale i samotný jed. Pokud je smíchán díl jedu se stejným dílem protijedu, vzniklá směs není léčivá ani otrávená. Otrava jedem může dosáhnout různých stupňů podle množství požitého jedu a hmotnosti otráveného pacienta. Jednotlivé léky pro jednotlivé stupně otravy obsahují různé poměry mezi obsaženými díly jedu a protijedu. Recepty pro léky na některé stupně otravy můžeš nalézt v této tabulce:*

Stupeň otravy	Počet dílů protijedu	Počet dílů jedu
1	3	1
2	9	1
3	27	1
4	81	1

Jak bys připravil lék pro pacienta se sedmým stupněm otravy?

Počet dílů protijedu obsaženého v léku je vždy n-tou mocninou čísla 3, kdy n se shoduje se stupněm otravy. Lék pro vyléčení pacienta se sedmým stupněm otravy by tedy musel obsahovat $3^7 = 2187$ dílů protijedu a 1 díl jedu.

Úloha 2. *Stará sekačka poseká trávník za 20 hodin. Dohromady s novou ho obě sekačky posekají za 4 hodiny. Jak dlouho bude trávník sekat pouze nová sekačka?*

Stará sekačka: celá práce za 20 h ......za 1 h $\frac{1}{20}$ práce
Nová sekačka: celá práce za x h ......za 1 h $\frac{1}{x}$ práce

Víme, že za 4 hodiny mají obě sekačky celý trávník posekaný:

$$\frac{4}{20} + \frac{4}{x} = 1$$
$$4x + 80 = 20x$$
$$80 = 16x$$
$$x = 5$$

Nová sekačka trávník poseče za 5 hodin.

Úloha 3. *Tabulku vyplň čísly 1-4 tak, aby se dala rozdělit na L tetromina s jedničkou nahoře a pak s ostatními čísly, které jsou dolů vzestupně 1-4. Tento tvar je možné libovolně otáčet i překlápět.*

1	
2	
3	4

						3	1
					2		
	2		1	2			
							2
2						2	
	2			4		1	
							3

Vidíme, že pro číslo 2 musí být dvě vedlejší pole volná. Pokud budeme uvažovat o tom, kde může být 4 v závislosti na 2 a 3, můžeme hned vyplnit následující pole:

8					1	2	3	1
7					4	3	4	2
6						2	4	3
5		2		1	2	1	4	3
4	3	4				4	3	2
3	2	1					2	1
2	1	2			4		1	4
1	4	3				1	2	3
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**

Dále si pro lepší orientaci označme jednotlivá pole stejně jako na klasické šachovnici. Vidíme, že na poli $f2$ musí být 4, kvůli L tvaru tetromina. Číslo 4 můžeme doplnit i na pole $e2$. Poté vidíme, že na polích $d2$ a $c2$ musí být po řadě 4 a 3; 2 a 1 z doplného tetromina také doplníme. Na polích $d4$ a $e4$ poté nesmí být nic jiného než 4 a 3; 1 do tvaru doplníme. Na poli $d5$ je poté 1 a proto na $b5$ je 2.

Na zbylá pole tabulky nyní budeme jednoznačně doplňovat další tetromina, dokud tabulku celou nevyplníme. Vyplněná tabulka vypadá takto:

8	1	3	2	1	1	2	3	1
7	2	4	4	3	4	3	4	2
6	3	4	4	2	1	2	4	3
5	1	2	3	1	2	1	4	3
4	3	4	1	4	3	4	3	2
3	2	1	2	1	2	3	2	1
2	1	2	3	4	4	4	1	4
1	4	3	1	2	3	1	2	3
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**

Úloha 4. *Nenačatá kostka sýra tvaru krychle o hraně 21 cm má po vnější straně tvrdý okraj. Slečna Varieta sýr krájí na menší krychličky o hraně 3 cm a na jednohubky použije všechen sýr. Kolik procent takových sýrových krychliček na sobě nemá tvrdý okraj?*

Celkový počet kychliček je $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. Bez tvrdého okraje je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ krychliček. Sýrových krychliček bez tvrdého okraje je tedy $\frac{125}{343} \cdot 100 = 36,44\%$.

Úloha 5. *Papír formátu A4 má přibližné rozměry 30* x *21 cm. Na základě těchto údajů urči povrch papírové loďky, která z něj lze složit. Za povrch považujeme vnější i vnitřní část lodi. Veškeré přebytečné „kapsy“ a otvory vzniklé kvůli přehýbání nezapočítávej. Za loďku se považuje ta, která vzniká úpravou večerníčkové čepičky, nikoliv parník.*

Při poskládání loďky zjistíme, že je tvořena z 16 shodných pravoúhlých trojúhelníků (pokud řešitel nepočítá vnitřní stranu plachty, tak pouze 14), tudíž stačí vypočítat jejich obsah. Při postupném skládání zjistíme, že ze stejných trojúhelníků je tvořena i mezikroková papírová čepice. Vzhledem k tomu, že při dokonalém složení mají být trojúhelníky rovnoramenné, budou mít délku přepony $10,5$ cm (při jednom kroku se papír přeloží přes kratší stranu na půl). Nyní stačí dopočítat pomocí Pythagorovy věty odvěsny:

$$x^2 + x^2 = 10,5^2$$

$$2x^2 = 110,25$$

$$x^2 = 55,125$$

Víc není potřeba počítat, protože obsah trojúhelníku bude $\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Povrch papírové loďky tedy je:

$$S = \frac{x^2}{2} \cdot 16 = x^2 \cdot 8 = 55,125 \cdot 8 = 441\ cm^2$$

Úloha 6. *Nechť M je množina několika přirozených čísel, které nemají v dekadickém zápisu nulovou cifru. Pro libovolná dvě čísla z M platí, že jejich součet je dělitelný 9 a zároveň ciferný součet každého čísla z M je menší nebo roven 5. Určete největší možný počet prvků množiny M.*

Vezměme si libovolnou dvojici čísel z M a pojmenujme je a a b. Dále říkejme, že $s(x)$ je ciferný součet přirozeného čísla x. Všimněme si, že $s(a) + s(b) \leq 5 + 5 = 10$. Proč? Pokud $a \neq b \neq 5$, tak díky tomu, že nemají v dekadickém zápisu 0, nemůže být žádná cifra v dvojciferných a víceciferných číslech větší než 4, a tak nemůže dojít k přepočtu. Protože je $a + b$ dělitelné 9, musí vzhledem k podmínce $s(a + b) \leq 10$ platit $s(a + b) = 9$. To si můžeme, jak již bylo vysvětleno, přepsat na $s(a) + s(b) = 9$. Protože $s(a), s(b) \leq 5$, musí nastat pouze možnost $s(a) = 5$ a $s(b) = 4$ nebo $s(a) = 4$ a $s(b) = 5$. Snadno nalezneme taková čísla a, b tuto rovnost splňující. Určitě tedy existuje množina M s dvěma prvky. Na volbě nezávisí, a tak si zvolme možnost $s(a) = 5$ a $s(b) = 4$.

Dále uvažujme, že v množině je další prvek, například c. Pak navíc získáváme součty $(a + c)$ a $(b + c)$ dělitelné 9. Podobně musí platit $s(c) = 5$, nebo $s(c) = 4$. Pokud $s(c) = 4$, pak součet $s(b + c) = s(b) + s(c) = 8$, avšak 8 není dělitelné 9. Nemůžeme proto v množině M uvážit žádný další prvek.

Množina M může mít nejvýše 2 prvky.

Úloha 7. *Jaký je součin reálných čísel a a b, který se nerovná 0, jestliže se a nerovná $-b$ a platí $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a+b$?*

Rovnici vynásobíme ab:

$$b+a=aab+bba$$

Odečteme $aab+bba$:

$$b-bba+a-aab=0$$

$$b(1-ab)+a(1-ab)=0$$

$$(1-ab)(a+b)=0$$

Jelikož a se nemůže rovnat $-b$, tak $(a+b)$ nemůže být 0. Proto $(1-ab)$ je určitě 0 a tím pádem $ab=1$.