Řešení 1. série

Úloha 1. *V ohradě poskakovali kůrovníci (vypadají jako malá prasátka, ale již během prvních týdnů života se jim pokožka začne přeměňovat na hrubou kůru), fénixové a tříhlaví draci (ti mají dvě nohy a dvě křídla). Dohromady mají všechna zvířata 31 hlav, 84 nohou a 24 křídel. Kolik jedinců daného živočišného druhu je na farmě chováno?*

Víme, že je 24 křídel, tudíž počet fénixů a draků bude dohromady 12, neboť oba druhy mají dvě křídla. Fénixové a draci mají taky oba dvě nohy, takže kůrovníci mají dohromady $84-(2\cdot 12)=60$ nohou, což znamená, že na farmě je $60:4=15$ kůrovníků. Fénixové a draci mají tedy dohromady $31-15=16$ hlav. Nyní už vidíme, že aby byl počet fénixů a draků dohromady 12, musí být na farmě dva tříhlaví draci a deset fénixů.

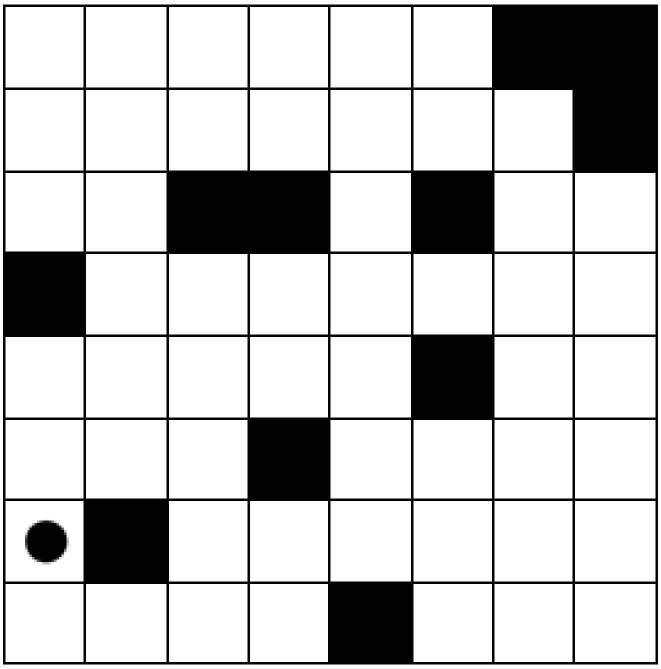
Úloha 2. *Na lístečku byla tato čísla. Doplň číselné řady:*

- 4, 11, 18, 25, ?
- 13, 9, 5, 1, ?
- 343, 49, 7, ?
- 4, 5, 7, 10, 14, 19, ?
- 1, 3, 15, 45, 225, 675, ?

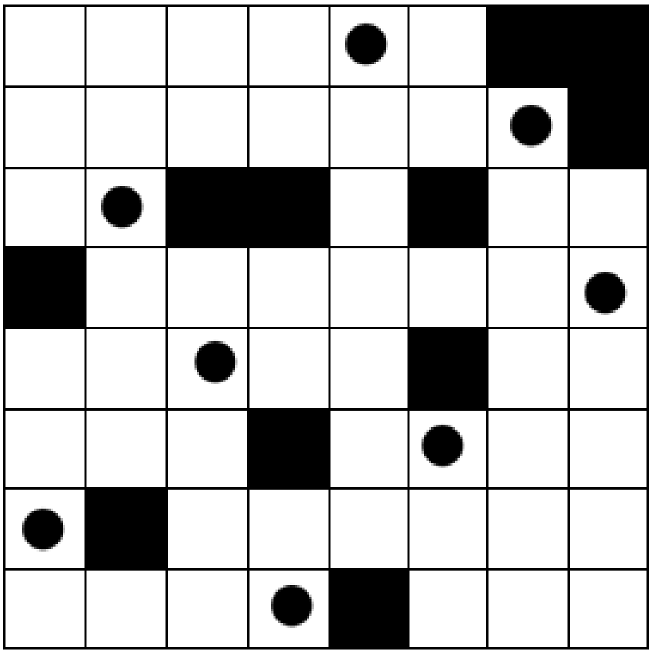
Jednotlivé řady doplníme následujícím způsobem:

- Vždy se přičítá 7, takže na místě otazníku bude 32.
- Vždy se odčítá 4, další číslo v řadě bude -3.
- Dělí se sedmičkou. Doplněným číslem bude 1.
- Vždy se přičítá o jedna vyšší číslo než v předchozím kroku, přičemž začínáme od 1. Tedy $4+1=5$, $5+2=7$, $7+3=10$ atd. Nakonec se přičítá 6, takže na místě otazníku bude $19+6=25$.
- Střídá se násobení třemi a pěti. $1\cdot 3=3$, $3\cdot 5=15$, $15\cdot 3=45$ atd. Nakonec se násobí pěti, takže výsledek je 3 375.

Úloha 3. *Doplň do ohrady zbylých 7 kamer tak, aby byla v každém řádku i sloupci jedna a aby společně viděly na každou část ohrady. Kamery vidí jen vodorovně a svisle. Černé pole jsou překážky, přes které nevidí.*



Možné řešení:



Úloha 4. *Kolik gramů borůzek má každé minipakotě František dát, jestliže se toto číslo rovná čtvrtině ze sedminy počtu minipakot a jestliže je v ohradě o 135 minipakot více, než kolik gramů má každé dát?*

Ze zadání získáme rovnici $x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot (x + 135)$, kterou snadno upravíme:

$$x = \frac{1}{28} \cdot (x + 135)$$

$$28x = x + 135$$

$$27x = 135$$

$$x = 5$$

Neznámé číslo, které hledáme je tedy 5.

Úloha 5. *Punčové řezy jsou nakrájeny na kousky, které mají tvar různých kosodélníků. Jaké vlastnosti musí mít kosodélník, který nemá všechny strany stejně dlouhé, aby šel jedním rovným řezem rozdělit na dvě části, ze kterých půjde složit kosočtverec? Uveď alespoň jedno řešení.*

Kosodélník musí mít jednu úhlopříčku stejně dlouhou jako stranu kosodélníku. Řez povede touto úhlopříčkou a vzniknou dva rovnoramenné shodné trojúhelníky. Ty k sobě přiložíme základnami a vznikne kosočtverec.

Úloha 6. *František se zamyslel také nad tím, kolik je všech možných ciferných součtů čtyřciferných čísel a kolik čtyřciferných čísel jsou mocniny nějakého přirozeného čísla. Která z těchto dvou skupin čísel je početnější?*

Nechť M_1 značí množinu všech ciferných součtů a M_2 množinu čtyřciferných čísel, která jsou přirozenou mocninou nějakého přirozeného čísla. Ciferný součet čtyřciferného čísla je nejvýše 36 $(9 + 9 + 9 + 9)$ nejméně 1 (1000). Všech ostatních hodnot mezi 36 a 1 lze dosáhnout ciferným součtem čtyřciferných čísel. Takže $|M_1| = 36$.

U množiny M_2 si stačí uvědomit fakt, že pro každé přirozené číslo platí, že jeho první mocnina je rovna tomu samému číslu. První mocnina přirozeného čísla je opět přirozené číslo. Tudíž množinu M_2 tvoří každé čtyřciferné přirozené číslo, nebo-li $|M_2| = 9000$.

Početnější je množina M_2.

Úloha 7. *Na trojúhelníkové herní ploše se střídají obě dvojčata v tazích. V každém tahu jedna z nich položí na plochu jeden trojúhelník. Vyhrává ta, která jako první postaví trojúhelník o straně 2. Existuje remízovací strategie pro sestru, která nezačíná?*

Úloha bohužel nebyla úplně jasně zadaná, a proto ji nemalá část řešitelů nepochopila. Myslíme, že by nebylo fér ji hodnotit, protože chyba byla na naší straně. Proto přikládáme opravené zadání, jehož řešení nám **můžeš poslat znovu s úlohami druhé a třetí série**. Jestliže tak učiníš, body za vyřešenou úlohu ti přepíšeme ...

Nové zadání:

Sestry si chtěly zahrát piškvorky, ale ty klasické se jim zdály moc nudné. Proto se rozhodly hrát speciální trojúhelníkové piškvorky. Pravidla jsou téměř stejná jako u normálních piškvorek, nehrají se však na čtvercové síti, ale na nekonečné trojúhelníkové ploše. Vyhrává ta sestra, které se jako první podaří udělat ze svých symbolů trojúhelník o straně 2. Pája má trochu strach, že bude ve velké nevýhodě, protože Jája začíná. Pomozte Páje rozhodnout, zda má remizovací strategii. remizovací strategie znamená, že Pája může hrát tak, aby Jája nevyhrála, ať už bude hrát jakkoli dobře. Pokud strategie existuje, tak ji Páje popište a vysvětlete, proč je tato strategie opravdu remizovací. V opačném případě dokažte, že remizovací strategie neexistuje.