Řešení Čtvrté Série

Úloha 1. *SARA se připojila k nejbližšímu satelitu a chystala se z něho kontaktovat všechny vládní a vědecké databáze na světě. Ke každému vyhledávání však potřebuje sedmimístný kód, který splňuje dvě podmínky. Každá číslice se v těchto kódech vyskytuje tolikrát, kolik je její hodnota. Navíc stejné číslice mají být zapsány vedle sebe, například 4444333. Kolik vyhledávání může SARA učinit?*

Nemůžeme použít číslice 8 a 9 (sedmimístné číslo nemůže mít 8 ani 9 číslic). Nejvyšším vyhovujícím číslem je tedy 7777777. Dále můžeme zkombinovat číslice 1 a 6 a to ve dvou variantách: 1666666 a 6666661. Další dvojice číslic je 2 a 5 opět ve dvou variantách: 2255555 a 5555522. Pak 3 a 4: 3334444 a 4444333. Nakonec můžeme trojky z předchozích variant nahradit jedničkami a dvojkami, dostáváme tedy 6 nových variant: 1224444, 1444422, 2214444, 2244441, 4444122 a 4444221. Jelikož jsme tímto jistě popsali veškeré přípustné možnosti, SARA tedy může určit 13 daných vyhledávání.

Úloha 2. *Na tabuli je úsečka AB o délce 12 cm. Body A a B jsou vedeny popořadě přímky p a q kolmé k úsečce AB. Na přímce p je sestrojen bod C tak, že $|AC| = 5$ cm, a na přímce q bod D tak, že $|BD| = 10$ cm. Body C a D leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce AB a jako hodnota x je označena délka úsečky CD. Jakou hodnotu má x?*

Sestrojíme rovnoběžku r s úsečkou AB tak, aby r procházela bodem C. Bod, ve kterém se protne r a BD, označíme E. Získali jsme tak pravoúhlý trojúhelník CED s pravým úhlem u vrcholu E, o němž víme následující: $|CE| = 12$ (protože $|AB| = |CE|$) a $|ED| = 5$ (protože $|ED| = |BD| - |CA| = 10 - 5 = 5$).

Nyní již známe obě odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, takže pomocí Pythagorovy věty dopočítáme délku přepony CD:

$$|CD| = \sqrt{|CE|^2 + |ED|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

Tedy $x = 13$.

Úloha 3. *SARA ví, že pokud k počtu EJ (elektrických jednotek), které za hodinu spotřebuje 20 robotů v normálním módu, přičteme 12, dostaneme počet EJ, které za hodinu spotřebuje skupina robotů v akcelerovaném módu o dva členy menší. Zároveň ví, že pokud by robotů v normálním módu byla polovina, spotřebovali by za hodinu tolik EJ, že by to stačilo 7 robotů v akcelerovaném módu a ještě by 2 EJ přebývaly. Kolik elektrických jednotek spotřebovává za hodinu robot v normálním módu a kolik robot v akcelerovaném módu?*

Ze zadání sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: jako x si označím počet robotů v normálním módu, jako y pak počet robotů v módu akcelerovaném.

$$20x + 12 = 18y$$
$$10x = 7y + 2$$

Druhou rovnici vynásobíme dvěma, čímž dostaneme rovnici $20x = 14y+4$. Tuto rovnici nyní odečteme od první a výsledek upravujeme:

$$12 = 4y - 4$$
$$4y = 16$$
$$y = 4.$$

Získali jsme y, snadno tedy např. z druhé rovnice dopočítáme x: $10x = 7y + 2 = 7 \cdot 4 + 2 = 30$, tedy $x = 3$. Úloha je tedy vyřešena.

Úloha 4. *Na kouzelnou krabičku se musí prstem napsat šest různých římských čísel od 1 do 20. Dále SARA zjistila, že:*

- *Tato čísla obsahují právě jedno prvočíslo a toto prvočíslo je větší než 13.*
- *První, druhé a šesté číslo jsou čísla dělitelná třemi.*
- *Čtvrté číslo je číslo obsahující římské číslice I, V, X a to každou právě jednou.*
- *První číslo obsahuje právě dvě římské číslice, které jsou od sebe různé, a zároveň páté číslo obsahuje ty stejné dvě číslice, jen v jiném pořadí.*
- *Třetí číslo je o jedna větší než šesté číslo.*
- *Druhé číslo je o jedna větší než čtvrté číslo.*

Z třetí podmínky plyne, že na čtvrté pozici mohou být čísla XIV nebo XVI, tzn. 14 nebo 16. Z druhé a čtvrté podmínky plyne, že na první pozici musí byt číslo dělitelné třemi a zároveň obsahovat právě 2 různé číslice. Z toho nám vyjde číslo VI (6), IX (9) nebo XV (15). Protože ze čtvrté podmínky víme, že číslo na páté pozici obsahuje také tyto dvě číslice, akorát v jiném pořadí, můžeme vyloučit XV (15) na první pozici. Tudíž na páté pozici může být IV (4) nebo XI (11). Protože 11 je prvočíslo a kód obsahuje podle první podmínky právě jedno prvočíslo a to je větší než 13, můžeme 11 vyloučit. Takže na páté pozici je číslo IV a na první pozici je číslo VI.

Protože na první, druhé a šesté pozici nemůže být prvočíslo (z první podmínky jsou dělitelná třemi a z téhož žádné není třem rovno) a ani čtvrté (14, 16), ani páté číslo (4) také není prvočíslo, tak prvočíslo musí být na třetí pozici. Na třetí pozici tedy může být číslo 17 nebo 19 (to jsou jediná prvočísla od 13 do 20). A protože číslo na třetí pozici je podle páté podmínky o jedna větší než číslo na šesté pozici, jediná možnost je 19 na třetí pozici a 18 na šesté pozici. Stejně tak z šesté podmínky dostaneme, že na druhé pozici je číslo 15 a na čtvrté číslo 14.

Kód tedy vypadal následovně: VI (6) XV (15) XIX (19) XIV (14) IV (4) XVIII (18).

Úloha 5. *Na tabuli jsou napsána čtyři čísla, která jsou však reprezentována symboly, kterým SARA nerozumí; nazvěme je a, b, c, d. Pod nimi je několik výpočtů, ze kterých lze vyčíst, že aritmetický průměr všech těchto čísel je roven 49. Pokud však číslo a zakryjeme a určíme aritmetický průměr zbývajících tří čísel, průměr se nezmění. Číslo b je rovno polovině součtu všech čtyř čísel. Dále platí, že rozdíl čísla $c - d$ je roven 11. Určete čísla napsaná na tabuli.*

Ukážeme si, že číslo a je rovno 49. Má totiž platit

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{b+c+d}{3} = 49.$$

Upravujme první rovnici:

$$3(b+c+d) + 3a = 4(b+c+d),$$

tj.

$$a = \frac{b+c+d}{3} = 49.$$

Dále snadno určíme číslo b. Víme, že aritmetický průměr čísel a, b, c, d je 49, součet těchto čísel dostaneme vynásobením čísla 49 číslem 4. Hodnota b je $4 \cdot \frac{49}{2} = 98$.

Nakonec využijeme poslední vlastnosti ze zadání, že $c - d = 11$. Protože známe čísla a a b, můžeme určit, jaký je součet čísel c a d:

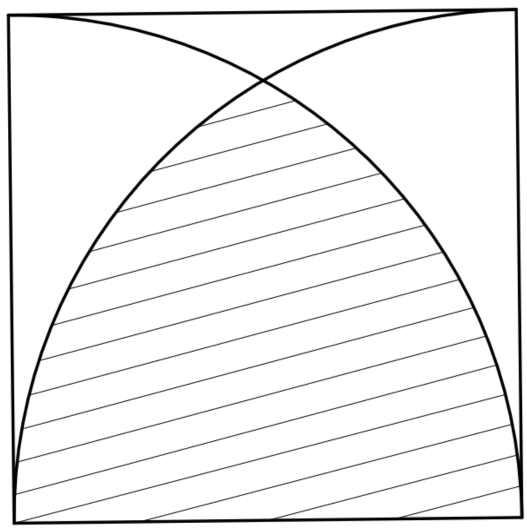
$$\frac{49 + 98 + c + d}{4} = 49,$$

tedy $c + d = 49$.

Rovnice $c - d = 11$ a $c + d = 49$ sečteme a dostaneme $2c = 60$, tedy $c = 30$. Číslo d již snadno dopočteme a vyjde nám $d = 19$.

Na tabuli jsou napsána čísla 49, 98, 11, 19.

Úloha 6. *Je dán čtverec o straně $a = 2$ a dvě kružnice o poloměru 2 se středy ve vedlejších vrcholech daného čtverce. Vyšrafované pole představuje klíčovou dírku. Určete obsah vyšrafovaného pole.*



Označíme si „dolní rohy“ čtverce na obrázku jako A, B a vyznačený průsečík kružnic jako P. Trojúhelník ABP je rovnostranný (všechny strany mají délku 2), tudíž jeho strany svírají úhel 60°. Uvažujme kruhovou výseč vymezenou úsečkami PA, AB a kruhovým obloukem BP. Tato výseč je jedna šestina celého kruhu, protože $60° = \frac{1}{6} \cdot 360°$. Obsah kruhu je πr^2, kde r je poloměr. Obsah dané výseče je tedy $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{2}{3}\pi$.

Zamyslíme-li se, vidíme, že obsah vyšrafovaného útvaru můžeme spočítat jako rozdíl dvojnásobku obsahu výseče a obsahu daného rovnostranného trojúhelníku. Abychom zjistili obsah trojúhelníku, musíme spočítat jeho výšku v. Tu zjistíme z Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 &= a^2 \\ \frac{a^2}{4} + v^2 &= a^2 \quad / - \frac{a^2}{4} \\ v^2 &= \frac{3a^2}{4} \\ v &= \frac{\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku je tedy $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. Obsah daného útvaru je potom roven $2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

Úloha 7. *Pokud čas na budíku zapíšeme ve tvaru $ab : cd$, určete, kolikrát za den platí následující dvojice podmínek: $a + b = c + d$ a zároveň $|a - b| \neq |c - d|$ ($|x|$ značí absolutní hodnotu reálného čísla, pokud je $x > 0$, tak $|x| = x$, pokud $x = 0$, tak $|x| = 0$ a pokud je $x < 0$, tak $|x| = -x$).*

Spočítáme nejprve všechna čísla splňující první podmínku. Zafixujme čísla a a b a označme $s = a + b$. Uvědomme si, že máme-li dáno přirozené číslo s, existuje právě $s + 1$ možností, jak toto číslo rozložit na součin dvou sčítanců, které jsou rovněž celé nezáporné – totiž $0 + s, 1 + (s - 1), ..., (s - 1) + 1, s + 0$. Je-li tedy $0 < s < 6$, máme právě v danou hodinu právě $s + 1$ časů vyhovujících první podmínce: Pokud $s \geq 6$, tak je jistě pro každé přípustné c (tedy od 0 do 6) můžeme zvolit d tak, aby $c + d = s$, tj. v každou takovouto hodinu máme právě 6 časů vyhovujících první podmínce. V případě $a = b = 0$ máme jediný čas vyhovující první podmínce, a to 00:00. Dohromady tedy máme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 3 + 4 + 5 + 6 = 59$ vyhovujících časů v době $00 : 00 - 5 : 59$, $10 : 00 - 14 : 59$, $20 : 00 - 23 : 59$ a $9 \cdot 6 = 36$ vyhovujících časů v době $6 : 00 - 9 : 59$,$15 : 00 - 19 : 59$, celkem tedy 95.

Nyní spočítáme, kolik z těchto časů nevyhovuje druhé podmínce. Pokud $a = b$, je to jen čas $aa : aa$, pokud $a \neq b$ a $b < 6$, jsou to dva typy časy, a to $ab : ab$ a $ab : ba$, pokud $b \geq 6$ je to pouze čas $ab : ab$. Dohromady je to tedy $3 + 2 \cdot 13 + 8 = 37$. Časů vyhovujících oběma podmínkám je tedy $95 - 37 = 58$.