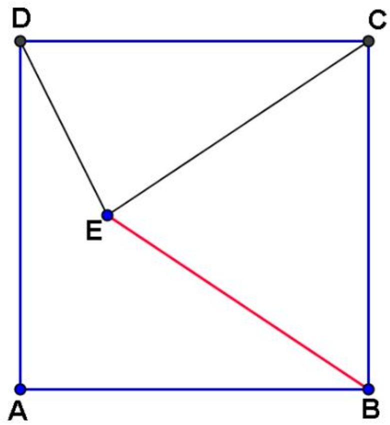
Řešení Druhé Série

Úloha 1. *V kleci se nacházeli třínozí lvorli, pětinozí mravlvi a sedminozí mravouci. Kolik bylo kterých, jestliže zvířat na M je 10, zvířat obsahujících ve jméně l je celkem 8, celkový počet nohou je dělitelný třemi a platí, že od dvou druhů je na zahradě stejný počet jedinců?*

Jelikož je podle první podmínky ze zadání mravouků a mravlvů dohromady více než mravlvů a lvorlů, tak musí být určitě mravouků více než lvorlů. Tedy stejný počet je buď mravlvů a mravouků, nebo mravlvů a lvorlů. Pokud by bylo stejně mravlvů a lvorlů, tak z toho, že jich je 8, vidíme, že budou 4 mravlvi a 4 lvorli a tím pádem 6 mravouků, což dohromady dá $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 74$ nohou, což není dělitelné třemi. Tím pádem musí být stejně mravlvů a mravouků a máme tudíž 5 mravlvů, 5 mravouků a 3 lvorly, čímž dostaneme $3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 69$ nohou, což dělitelné třemi je. V kleci tedy jsou 3 lvorli, 5 mravlvů a 5 mravouků.

Úloha 2. *Místnost má půdorys čtverce o straně 60 metrů, jehož vrcholy SARA ve své hlavě popsala jako ABCD. Bod, kde stála SARA, nazvala E a je takový, že velikost úhlu CDE je 75^o a velikost úhlu DCE je 30^o. Určete vzdálenost SARY od schodiště, které se nachází v bodě B.*



Nejdříve dopočítáme úhel DEC:

$$|\measuredangle DEC| = 180^\circ - |\measuredangle CDE| - |\measuredangle DCE| = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ.$$

Trojúhelník DEC je tudíž rovnoramenný se základnou DE, tedy $|CE| = |CD| = 60$ m. Dále:

$$|\measuredangle BCE| = 90^\circ - |\measuredangle ECD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Z $|BC| = |DC| = |CE|$ plyne $|\measuredangle EBC| = |\measuredangle CEB|$. Ale potom

$$2|\measuredangle EBC| = |\measuredangle EBC| + |\measuredangle CEB| = 180^\circ - |\measuredangle BCE| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

tudíž $|\measuredangle EBC| = |\measuredangle CEB| = |\measuredangle BCE| = 60^\circ$. Trojúhelník BCE je tedy rovnostranný a $|BE| = |BC| = 60$ m.

Úloha 3. *SARA zjistila, že číslo na každé jmenovce má tvar $X_1X_2X_3X_4$, kde X_1, X_2, X_3, X_4 představují číslice $0 - 9$. Na všech jmenovkách se vyskytuje právě jedna šestka. Kolik takovýchto jmenovek může existovat?*

Uvažujme nejprve, že je šestka na prvním místě. Pak na druhém, třetím a čtvrtém místě mohou být všechny číslice kromě šestky. Celkem tedy jmenovek tvaru $6X_2X_3X_4$, kde $X_{2,3,4} \neq 6$, je $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.

Analogicky tento postup můžeme použít pro případy, kdy je šestka na druhém, třetím nebo čtvrtém místě, tedy celkový počet jmenovek požadovaného tvaru je $4 \cdot 729 = 2916$.

Úloha 4. *Polokoule má poloměr 5 m. 80% kruhového půdorysu polokoule tvořily podivné symboly. SARA rozeznala, že 50% této plochy je pokryto arabskými znaky, 25% hebrejskými a zbytek byl popsán symboly, které SARA ještě nikdy neviděla. Jakou plochu zabíraly neznámé symboly?*

Kruhový půdorys polokoule o poloměru 5 metrů je jistě kruh o poloměru 5 metrů. Jeho obsah je pak $S = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\ m^2$. Osmdesát procent této plochy spočítáme jako $\frac{80}{100} \cdot S = 20\pi\ m^2$. Neznámé symboly z této plochy tvoří $100 - 50 - 25 = 25$ procent, tedy jednu čtvrtinu. Zabírají tedy plochu o obsahu $\frac{1}{4} \cdot 20\pi = 5\pi\ m^2$.

Úloha 5. *Digitální zámek může být zajištěn libovolně dlouhým kódem. Pokud vynásobíme číslo o jedno menší, o jedno větší a o čtyři větší, než je kód k zámku, dostaneme číslo rovné součtu třetí mocniny kódu, 4násobku druhé mocniny kódu a dvojnásobku kódu zvětšeného o jedna.*

Co se týče řešení této úlohy, vyskytla se nám tu taková gramatická kulišárna: úloha je dvojznačná a lze z ní sestavit dvě rovnice. Obě řešení jsme uznali.

V prvním případě máme rovnici

$$(x-1)(x+1)(x+4) = x^3 + 4x^2 + 2(x+1). \tag{1}$$

Roznásobíme levou stranu: $(x-1)(x+1)(x+4) = (x^2-1)(x+4) = x^3 + 4x^2 - x - 4$. Rovnice je tedy tvaru

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = x^3 + 4x^2 + 2x + 2.$$

Od obou stran odečteme výraz $x^3 + 4x^2$ a dostaneme

$$-x - 4 = 2x + 2.$$

K oběma stranám rovnice nyní přičteme $x - 2$ a dostaneme $3x = -6$ a tedy $x = -2$. Jelikož toto řešení vyhovuje zkoušce, dostáváme, že kód je roven číslu -2.

V druhém případě máme rovnici

$$(x-1)(x+1)(x+4) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1. \tag{2}$$

Řešit ji budeme obdobně jako rovnici (1) a dostaneme řešení $x = -\frac{5}{3}$.

Úloha 6. *SARA má ve své paměti místo na 100 terabajtů (TB) dat a přesně 100 souborů. V systému se nachází mapové soubory .mpp, z nichž každý zabírá 6TB, potom obrazové soubory .pix, z nichž jeden zabírá 3TB a nakonec textové soubory .wrd, které mají každý 100 gigabajtů (1 terabajt je 1000 gigabajtů). Kolik souborů od každého druhu musí SARA stáhnout, aby zabíraly přesně 100TB a bylo jich právě 100?*

Označíme si a, b, c popořadě počet souborů .mpp, .pix, .wrd. Ze zadání máme dvě rovnice:

$$a + b + c = 100 \text{ (počet)}$$
$$6a + 3b + 0{,}1c = 100 \text{ (terabajty)}.$$

Vynásobíme první rovnici šesti a odečteme druhou:

$$\begin{aligned} 6a+6b+6c&=600\\ -(6a+3b+0,1c&=100)\\ 3b+5,9c&=500 \end{aligned} \tag{3}$$

Nyní vynásobíme první rovnici třemi a odečteme druhou:

$$\begin{aligned} 3a+3b+3c&=300\\ -(6a+3b+0,1c&=100)\\ -3a+2,9c&=200 \end{aligned} \tag{4}$$

Obvykle dvě rovnice na tři neznámé nestačí, ale víme, že a, b i c jsou nezáporná čísla. Tedy pokud $3b>0$, pak z (3) dostáváme $500-5,9c>0$. To znamená, že $c<84,75$.

Také pokud $3a>0$, tak $2,9c-200>0$. To znamená, že $c>68,97$. Jelikož $0,1c=100-6a-3b$ je celé číslo, tak 10 dělí c. Jelikož jsme ukázali $68,97<c<84,75$, tak dostáváme $c=70$ nebo $c=80$. Pokud za c dosadíme 80, dostaneme z (3) a (4) $a=10.67$ a $b=9.33$. Jelikož a,b musí být přirozená čísla, tak víme, že se nejedná o správné řešení. Pokud za c dosadíme 70, dostaneme $a=1$ a $b=29$, což je vyhovující řešení.

SARA tedy musí stáhnout 1 soubor .mpp, 29 souborů .pix a 70 souborů .wrd.

Úloha 7. *Ukažte, že z libovolných 7 přirozených čísel můžeme vybrat nenulový počet čísel takových, že jejich součet je dělitelný 7.*

Označme si jednotlivá čísla a,b,c,d,e,f a g. Dále si označme velkými písmeny jejich součty tak, že například součet D roven součtu $a+b+c+d$, součet B bude roven $a+b$ atd. Nyní se podíváme na zbytky jednotlivých součtů po dělení číslem 7. Pokud je některý součet dělitelný 7 a zbytek po dělení je tedy 0, jsou hledaná čísla právě ta, která se vyskytují v tomto součtu. V opačném případě žádný ze součtů nebude dělitelný 7, a proto budou všechny dávat zbytek v rozsahu od 1 do 6. Jelikož ovšem máme pouze 6 různých možných zbytků na 7 součtů, tak některé dva součty musí dávat stejný zbytek po dělení číslem 7. Nyní je zřejmé, že pokud od většího součtu odečteme menší, bude výsledný rozdíl dělitelný číslem sedm. Proto stačí vybrat čísla, která tvoří tento rozdíl, což jsou čísla, která patří do většího součtu, ale nepatří do menšího součtu.

Například pro čísla $a=2,b=15,c=6,d=4,e=23,f=8,g=8$ budou součty vypadat následovně: $A=2,B=17,C=23,D=27,E=50,F=58,G=66$. Zbytky součtů po dělení 7 jsou pak tyto: 2, 3, 2, 6, 1, 2, 3. Vidíme, že součty B,G dávajíc stejný zbytek, takže $G-B$ je dělitelné sedmi. Opravdu, $F-B=(a+b+c+d+e+f+g)-(a+b)=c+d+e+f+g=6+4+23+8+8=49=7\cdot 7$.