Úloha 1. *Na komářím závodě v letu se sešli fanoušci 4 favoritů. Jednu pětinu návštěvníků tvořili příznivci červeného závodníka, dvě devítiny tvořili fanoušci zeleného závodníka, čtyři patnáctiny fanoušci žlutého a zbytek návštěvníků podporovalo modrého závodníka. Kolik bylo celkem návštěvníků závodu, jestliže ani jeden ze čtyř fanklubů netvořilo méně než 30 a ani více než 60 návštěvníků?*

Nejdříve určeme, jakou část fanoušků tvořili všichni ti, kteří modrého závodníka nepodporovali.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{9}+\frac{4}{15}=\frac{9+10+12}{45}=\frac{31}{45}$$

Z tohoto údaje už snadno dopočítáme, jakou část fanoušků tvořili fanoušci modrého závodníka:

$$\frac{45}{45}-\frac{31}{45}=\frac{14}{45}$$

Poměr počtu fanoušků červeného, zeleného žlutého a modrého závodníka je tedy:

$$9:10:12:14$$

Vzhledem k tomu, že čísla 14 a 45 jsou nesoudělná, tak počet fanoušků modrého závodníka musí být dělitelný číslem 14. Mezi čísly 30 a 60 jsou jedinými násobky čísla 14 čísla 42 a 56. Pokud by ale bylo fanoušků modrého závodníka pouze 42, tak fanoušků červeného by muselo být pouze 27, což nelze. A celkový počet návštěvníků tedy je:

$$9\cdot 4+10\cdot 4+12\cdot 4+14\cdot 4=36+40+48+56=180$$

Bylo více cest ke správnému řešení. Pokud jste je měli správně odůvodněné, samozřejmě jsme je také uznávali.

Úloha 2. *O synchronizačním čísle řekla SARA profesorovi, že je to x, o kterém se ví, že se rovná třetině z pětiny z čísla, které se po odečtení 210 rovná zase x. Jakou hodnotu má x?*

$$x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot(x+210)$$

$$x=\frac{1}{15}\cdot(x+210)$$

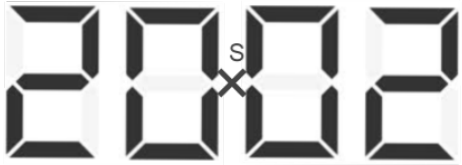
$$15x=x+210$$

$$14x=210$$

$$x=15$$

Neznámé číslo, které hledáme, je tedy 15.

Úloha 3. *Čtyřciferné číslo, které je na panelu napsáno digitálními číslicemi, musí být středově souměrné. Jednotlivé číslice od sebe mají konstantní vzdálenost (viz obrázek). Kolik existuje takových čtyřciferných čísel?*



Aby bylo takové číslo středově souměrné, musí první a čtvrtá číslice tvořit středově souměrný útvar a stejně tak druhá a třetí číslice. Zároveň středy souměrnosti obou útvarů musí být totožné. Obvykle je tento střed bod S, kromě speciálního případu - číslo 1111 je středově souměrné podle jiného středu, jelikož všechny jedničky jsou psány vpravo. Z toho plyne, že čísla 1ab1 nebo a11b nejsou středově souměrná, kromě případu $a = b = 1$. Jedničku tedy můžeme z následujících úvah vyjmout.

Určeme všechny uspořádané dvojice číslic, které mohou být na prvním a čtvrtém místě, aby vznikl středově souměrný útvar. Jsou to dvojice $(2,2), (5,5), (6,9), (8,8), (9,6)$ - celkem 5 dvojic. Uspořádané dvojice číslic na druhém a třetím místě jsou všechny tyto a navíc dvojice $(0,0)$ - celkem tedy 6 dvojic. Možných čísel tedy (podle kombinatorického pravidla součinu) je $5 \cdot 6 + 1 = 31$ (kde přičtená jednička značí číslo 1111).

Úloha 4. *Na zemi ležel jeden trojúhelník, jeden čtverec, jeden pětiúhelník, a tak dále, až po dvaceti-úhelník. Kolik nejvíce útvarů můžeme vybrat tak, aby součin počtů jejich hran byl 11700?*

- Číslo 11700 si rozložíme na prvočísla: $11700 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$
- Čísla 3 až 20 si také rozložíme na prvočísla
- Protože chceme co nejvíce čísel, budeme vybírat čísla co nejmenší
- 3 se v rozkladu čísla 11700 vyskytuje, vybereme trojúhelník
- $4 = 2 \cdot 2 \Rightarrow$ vybereme i čtverec
- 5 se v rozkladu vyskytuje, tak pětiúhelník také vybereme
- zbývá vybrat takové útvary, pro které platí, že součin jejich hran je $3 \cdot 5 \cdot 13 = 13 \cdot 15$, tedy vybereme ještě třináctiúhelník a patnáctiúhelník. Více než dva vybrat nemůžeme, protože číslo $3 \cdot 5 \cdot 13$ nemůžeme zapsat jako součin více než 3 různých přirozených čísel, aniž bychom použili číslo 1. A jako součin právě 3 čísel bychom ho mohli zapsat pouze jako součin $3 \cdot 5 \cdot 13$, což nelze, protože trojúhelník i pětiúhelník už jsou vybrány.

Můžeme vybrat nejvíce 5 útvarů (trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, třináctiúhelník a patnáctiúhelník) tak, aby byl součin jejich hran roven 11700.

Úloha 5. *Kolika způsoby lze rozdělit obdélník o rozměrech 30* x *50 cm na dva díly pomocí jediného rovného řezu tak, aby ze vzniklých částí šel poskládat trojúhelník pomocí otočení a posunutí v rovině (ne otočení v prostoru)?*

Řez můžeme provést čtyřmi způsoby.

1. Řez mezi dvěma stranami: Vznikne buď trojúhelník a pětiúhelník, nebo dva čtyřúhelníky. V obou případech spojením vznikne pouze čtyřúhelník, nikdy trojúhelník.
2. Řez mezi protějšími vrcholy: Takovým řezem vzniknou dva shodné trojúhelníky. Je zřejmé, že jejich přiložením k sobě stejně dlouhými stranami vznikne vždy rovnoběžník.
3. Řez z vrcholu ke straně: Zvolme vrchol, ze kterého povedeme řez, a označme ho A. Další vrcholy označme standardně B, C a D. Dále vyznačme bod E na úsečce CD. Řez povede mezi body A a E. Nutnou podmínkou, aby vznikl trojúhelník je, že se k sobě musí přikládat dvě stejně dlouhé strany tak, aby nevznikl překryv. Druhou podmínkou je, že součet úhlů u vrcholů, které splynou, musí být 180^o, aby splynuly také přilehlé hrany. Je zřejmé, že jediná poloha bodu E splňující tyto podmínky je, pokud se nachází uprostřed strany CD. Takto vznikne trojúhelník ABD, ve kterém se k sobě přiloží strany CE a ED. Takovýchto řezů můžeme v obdélníku provést osm (pro každý vrchol mohu vybrat jednu ze dvou protějších stran).

Úloha 6. *Určete z kolika nejméně (stejných) sirek můžete v trojrozměrném prostoru poskládat čtyři rovnostranné trojúhelníky o hraně dlouhé jedna sirka. Nezapomeňte pořádně dokázat, že méně sirek být nemůže!*

Řešení rozdělíme do 2 částí – nejprve dokážeme, že nebudeme potřebovat méně jak 6 sirek, a poté najdeme takové rozložení 6 sirek, kdy vytvoříme 4 rovnostranné trojúhelníky. Určitě žádné 2 trojúhelníky nemohou mít více než 1 společnou sirku (to by byly identické). První zabere určitě 3 sirky, druhý alespoň 2 (1 může mít společnou s 1. trojúhelníkem a další 2 musíme přidat), třetí alespoň 1 (1 z 1., 1 z 2. a jednu musíme přidat) a na vytvoření 4. trojúhelníku teoreticky nemusíme přidávat žádnou sirku (bude mít společnou stranu s každým z již vytvořených trojúhelníků). Takže určitě budeme potřebovat alespoň 6 sirek.

A konfigurací, kdy ze 6-ti sirek vytvoříme 4 rovnostranné trojúhelníky, je například pravidelný čtyřstěn.

Úloha 7. *Asistent Martin donesl na omluvu makový koláč. Koláč má tvar kruhu o poloměru 8 cm a maková náplň je pouze v oblasti soustředného kruhu s poloměrem 6 cm. Protože měl dobrou náladu, zadal profesorovi takovouto úlohu: Profesorův kousek musí být oddělen jediným řezem o délce 12 cm a navíc procházet rozinkou umístěnou na okraji kruhu makové náplně. Pomozte profesoru Perikulovi rozkrojit koláč, aby si konečně mohl na svém kousku pochutnat (rozbor, postup konstrukce, konstrukce, diskuze).*

K řešení této úlohy stačilo provést jednoduchou úvahu. Označme si vnější kružnici K a vnitřní kružnici k. Pokud narýsujeme libovolnou sečnu K délky $12cm$, protne kružnici k ve dvou bodech. Pokud by jeden z těchto bodů byl hledanou rozinkou, máme vyhráno. Na to se ovšem nemůžeme spoléhat, a proto musíme provést ještě jeden krok. Naši narýsovanou úsečku otočíme podle středu obou kružnic tak, aby protínala náš hledaný bod R (jako rozinka). Označme tedy střed kružnic S, střed narýsované sečny O a průsečíky sečny a kružnice k body A a B. Nyní narýsujeme polopřímku SO a k ní druhou procházející bodem S tak, že budou svírat úhel velikosti $|\sphericalangle ASR|$. Na této nové polopřímce vyznačíme bod O', aby platilo $|SO|=|SO'|$. Posledním krokem je narýsovat sečnu kružnice K procházející bodem O' a kolmou na polopřímku SO. Takto jsem otočil původní sečnu a vznikla nová, která protíná kružnici k v bodech A' a B'. Díky úhlu otočení splývá bod A' s hledaným bodem R. Úloha má dvě řešení, jelikož je nutné také započítat takovou sečnu, na níž splývá s bodem R bod B'.