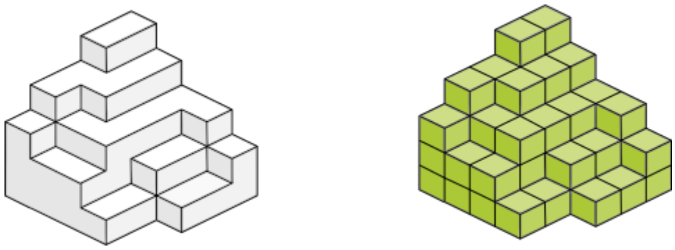
# Řešení Čtvrté Série

**Úloha 1.** *Původně zde stála krychle složená ze 125 shodných kryptonitových kostiček. Postupně z ní však kostiček ubývalo, až se dostala do stavu znázorněného na obrázku. Celý tento útvar byl poté přestříknut ochranou barvou (a to i ze spodu). Nyní se krychle rozsypala na dílčí kostičky.*

*a) Kolik kostiček má alespoň jednu stranu nabarvenou a kolik je celkem nabarvených stran?*
*b) Je možné kostičky útvaru přeskládat do krychle o straně 4 tak, aby žádná část povrchu nebyla nabarvená? (**6 bodů**)*



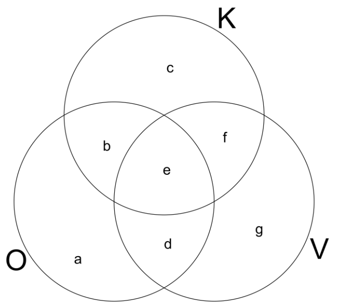
a) Určitě celé spodní patro, takže $23 (= 25 - 2)$. Druhé patro odspoda má obarvené všechny obvodové kostičky, z opačné části, než se díváme, jich je po obvodu 9 a z naší strany dalších 5, takže v tomto patře 14. O patro výše jich je z opačné strany 8 a z naší 4, celkově 12. O patro výš jich je 7 a v nejvyšším patře 2. Celkem: $23 + 14 + 12 + 7 + 2 = 58$. Celkový počet nabarvených stěn spočítáme tak, že si stěny rozdělím na ty, které jsou nabarvené a jsou nahoře nebo dole na nějaké kostičce – těch je v každém z těchto pohledů 23. Na ty, které jsou nabarveny a jsou vidět „zprava“ a potom z té opačné strany – těch je v každém z těchto pohledů 21. A v každém ze zbývajících dvou směrů jich je 17.

Celkem $2 \cdot (23 + 21 + 17) = 122$.

b) Spočítáním zjistíme, že útvar na obrázku má 65 kostiček, což je více než 64, které má krychle o straně 4, takže ji můžeme postavit. Když se podíváme na to, kolik stěn kostek v ní je vidět ven, tak pro 8 rohových stěn platí, že jim jdou z venku vidět 3 stěny. My máme k dispozici 7 (65 celkem mínus těch 58 obarvených z části a)) kostek, které jsou celé bílé, tedy je určitě můžeme umístit do rohů a jako tu poslední vybereme třeba takovou, že má právě jednu obarvenou stranu a takových kostek je jenom na dně celého útvaru 8, takže mi jich ještě 7 zbývá. Na hrany budu potřebovat 24 kostek, které mají alespoň dvě neobarvené stěny, které jsou vedle sebe, když se podíváme na obrázek, tak si všimneme, že tomuto vyhovují úplně všechny krychličky, tedy s tím nebude problém a stejně tak nebude problém poskládat „vnitřní“ čtverce $2x2$, protože na ně stačí najít krychle, které mají alespoň jednu neobarvenou stěnu a takové jsou všechny krychličky.

Tedy krychle o straně 4 poskládat lze.

**Úloha 2.** *Ve skladu je uloženo 20 robotů. Každý z robotů umí alespoň jednu z těchto dovedností: vaření kávy, vykládání vtipů, opravářství. Jenom jeden robot zvládá všechny tři dovednosti. Tři roboti se zabývají pouze opravářstvím. Robotů, kteří vaří kávu, je dvakrát víc než těch, kteří vykládají vtipy. Polovina vtipotelců jsou navíc i opraváři. Ti, kteří vaří kávu, nikdy neovládají právě dvě dovednosti. Kolik je ve skladu robotů ovládajících opravářství? (**5 bodů**)*




Označíme si počet všech robotů, kteří vaří kávu K, počet všech, kteří vykládají vtipy V a počet všech, kteří opravují O, a si označme ty, kteří pouze opravují a nedělají nic jiného, b ty, kteří opravují a vaří kávu, e ty, kteří dělají všechno a analogicky si podle obrázku označme i ostatní písmenka.

Nyní si přepíšeme zadání:

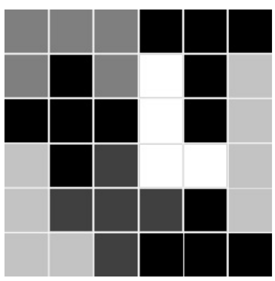
$$a + b + c + d + e + f + g = 20$$
$$e = 1, a = 3$$
$$b + c + e + f = 2(d + e + f + g)$$
$$f + g = e + d$$
$$b = 0, f = 0$$
$$a + b + d + e =?$$

S ohledem na to, co všechno známe, se jedná o soustavu 3 rovnic o 3 neznámých (c, d, g, přičemž d je to, co nás zajímá), kterou je jednoduché vyřešit a dostaneme řešení d=2, takže $a + b + d + e = 3 + 0 + 2 + 1 = 6$.

Robotů ovládajících opravářství je 6.

**Úloha 3.** *Pomozte asistentovi naskládat kusy monitoru zpět do mřížky tak, aby se nepřekrývaly. Dílky je možné libovolně otáčet, ne však překlápět, protože obrazovka funguje pouze z jedné strany. (**5 bodů**)*

V zadání bylo: naskládejte dílky do mřížky. Takže stačilo nakreslit takovýto obrázek.



**Úloha 4.** *3/20 operační paměti zabírá samotný operační systém. Každý z 24 chladících modulů zabírá stejně velkou část paměti, jako 1/6 operačního systému. Antivirus zabírá 1/4 zbývající operační paměti. Jaká část operační paměti byla volná? (**5 bodů**)*

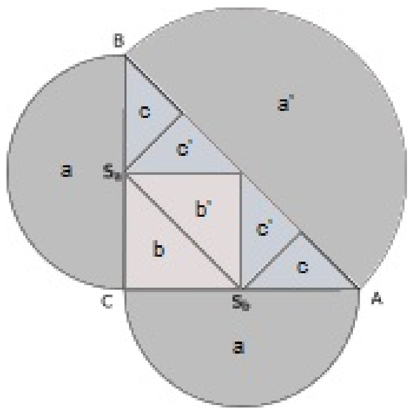
Operační systém zabírá 3/20 operační paměti.

Chladící moduly zabírají celkem $24 \cdot 1/6 \cdot 3/20 = 12/20$ operační paměti.

Dohromady zabírají $3/20 + 12/20 = 15/20 = 3/4$ operační paměti.

Antivirus tedy zabírá $1/4 \cdot 5/20$ a tedy volné místo je $3/4 \cdot 5/20 = 3/16$ operační paměti.

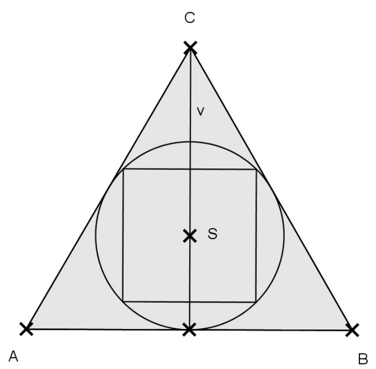
**Úloha 5.** *Na obrázku vidíte půdorys místnosti. Pro odčerpání vody potřebuje asistent znát poměr zatopené plochy (vyznačena šedě) a suché plochy (vyznačena bíle). Vypočítejte tento poměr, jestliže trojúhelník ABC je rovnoramenný a pravoúhlý. (**5 bodů**)*




Úsečka $S_A S_B$ je střední příčkou v trojúhelníku $ABC$, když si vyznačíme i ty zbývající 2, tak zjistíme, že b=b'. A c=c', protože trojúhelníky jimž tyto obsahy přísluší, jsou shodné podle věty SsU. Ramena trojúhelníku ABC si označím $r$ a základnu $z$. Platí $2a = \pi(r^2 + r^2)/2 = \pi z^2/2$ =a' (předposlední rovnost platí díky Pythagorově větě).

Tedy poměr zatopené a suché plochy je 1 : 1.

**Úloha 6.** *Plošina má tvar rovnostranného trojúhelníku o straně 4 cm. Transformační program však umí pracovat pouze s čtvercovou plochou. Tuto čtvercovou plochu získal asistent tak, že trojúhelníku vepsal kružnici a té vepsal čtverec. Spočítejte obsah tohoto čtverce. (**7 bodů**)*




Z Pythagorovy věty získáme výšku:

$$v^2 + 2^2 = 4^2$$
$$v^2 = 12$$
$$v = 2 * \sqrt{3}cm$$

Vzhledem k tomu, že v rovnostranném trojúhelníku splývá těžnice s výškou, těžiště se středem S kružnice vepsané a těžiště třetí těžnici platí, že poloměr kružnice vepsané je $r = v/3 = 2 * \sqrt{3}/3$ cm.

A úhlopříčka ze čtverce je dvojnásobkem této délky. Jelikož je čtverec deltoidem, tak jeho obsah spočítáme jako součin úhlopříček vydělený dvěma, což v našem případě znamená $S = 1/2(2 * 2 * \sqrt{3}/3)^2 = 1/2 * 16/3 = 8/3cm^2$

**Úloha 7.** *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Jeho úhlopříčky se protínají v bodě $S$. Platí:*

$$|AB| = 4cm, |BD| = 5cm, |\angle DAB| = 90^o, |\angle ABD| = |\angle BDC|$$

*Dále víme, že $|AD| = |DC|$. Určete poměr délek úseček DS a BS. (**5 bodů**)*

Jelikož je úhel DAB pravý, platí podle Pythagorovy věty:

$$|AD|^2 + |AB|^2 = |BD|^2$$
$$|AD|^2 = 9$$
$$|AD| = 3cm$$

A taky $|CD| = 3$ cm podle zadání. Protože platí: $|\angle ABD| = |\angle BDC|$ a zároveň $|\angle ASB| = |\angle DSC|$ (jsou vrcholové), jsou trojúhelníky $ABS$ a $CDS$ podobné podle věty UU.

Takže $|BS|/|DS| = |AB|/|CD| = 4/3$.