Řešení Třetí Série

Úloha 1. *Kód k této konzoli jsou čtyři po sobě jdoucí čísla, na které musí profesor pomyslet. Součin prvního, třetího a čtvrtého je roven o devět zmenšenému součinu čtvrtého a druhé mocniny druhého čísla. Jaká čtyři čísla to jsou?*

Máme čísla $a-1$, a, $a+1$, $a+2$. Sestavíme rovnici: $(a-1)(a+1)(a+2) = a^2(a+2) - 9$ a vyřešíme:

$$(a^2-1)(a+2) = a^3 + 2a^2 - 9$$
$$a^3 + 2a^2 - a - 2 = a^3 + 2a^2 - 9$$

Vyšší mocniny a se nám vyruší a získáváme $a = 7$. Čísla jsou tedy 6, 7, 8, 9.

Úloha 2.
Profesor: „Pamatuješ, kdy jsme se potkali poprvé?“
Asistent: „Někdy v 80. letech, ne?“
Profesor: „Přesně! Pamatuju si, že poslední cifra toho roku byla stejná jako poslední cifra tvého tehdejšího věku!“
Asistent: „To je pravda. Teď mi došlo, že můj tehdejší věk byl roven desetinásobku první cifry tvého nynějšího a můj současný věk už je roven šestnáctinásobku tohoto čísla!“
Profesor: „Hah!“
Asistent: „Čemu se smějete?“
Profesor: „Už vím, ve kterém roce ses narodil!“
Současný věk odpovídá věku v roce 2015. Ve kterém roce se narodil profesor a ve kterém jeho asistent?

Bohužel, v zadání této úlohy se vyskytla chyba, kvůli níž byla poněkud těžší, než by měla. Ovšem skvěle si s ní poradil Vojěch Turland, jemuž gratuluji k bezchybnému řešení! Autorské řešení je vypracováno právě podle jeho.

Asistentův věk v 80. letech byl roven desetinásobku první cifry profesorova současného, tj. poslední cifra asistentova tehdejšího věku byla nula. To je podle zadání zároveň poslední cifra roku, v němž se potkali – musel to teda být rok 1980.

Změna asistentova věku mezi oběma setkáními může být 34, 35 nebo 36 let – v závislosti na datu narozenin asistenta a na datu obou setkání. Pokud změnu asistentova věku označíme jako b, jeho věk době setkání r.1980 jako w a první cifru profesorova tehdejšího věku jako a, podle zadání mám w=10a a w+b=16a. Tedy $b = 16a - w = 16a - 10a = 6a$ a jelikož b i a jsou přirozená čísla, musí $6|b$. Jelikož $b \in 34, 35, 36$ musí nutně b=36. Z toho plyne, že v roce 1980 se potkali před asistentovými narozeninami a v roce 2015 po nich. V čase jejich setkání tedy bylo asistentovi $10a = 10b/6 = 10 \cdot 36/6 = 60$ let, v roce 1980 tedy oslavil své 61. narozeniny. Proto se musel narodit roku $1980 - 61 = 1919$.

Co se týče profesorova věku, víme, že jeho první cifra je 6, o druhé však ze zadání nemáme žádné informace. Profesorův věk tedy může nabývat hodnot $60, 61, \ldots, 69$. Rok profesorova narození podle toho tedy leží v rozmezí let 1945 (r. 1980 se potkali po profesorových 60. narozeninách) a 1955 (r. 1980 se potkali před profesorovými 69. narozeninami).

Úloha 3. *V manuálu je napsaný čtyřciferný kód pro zastavení časového přesunu. Poslední cifra je 4. Profesor však naschvál číslo přepsal tak, že první a čtvrtá cifra byla stejná, druhá ale byla největší společný dělitel druhé a čtvrté cifry původního, 3 byla o pět menší než u čísla, které bylo v manuálu původně. Nové číslo je o 650 menší než původní. Kolik možností původního kódu existuje?*

V zadání tohoto příkladu se bohužel vyskytla nejednoznačnost - a to ve formulaci „první a čtvrtá cifra byla stejná". Pokud je původní číslo ve tvaru $abc4$, nové číslo lze přepsat jako $apq4$ (**1. verze**), nebo jako $epqe$ (**2. verze**). Obě řešení jsou tedy brána jako správná.

1. verze: Nechť dekadický zápis původního kódu je $abc4$ a nového $apq4$. Pak $650 = abc4 - epq4 = bc0 - pq0 = 10(bc - pq)$, tedy $65 = bc - pq = 10(b - p) + c - q = 10b - 10D(b, 4) + c - c + 5$, tedy $10b - 10D(b, 4) = 60ab = 6 + D(b, 4)$. Mezi jednocifernými čísly to platí pro $b = 7$, tedy jedna možnost. Číslo a je libovolné, tj. devět možností, číslo c musí být větší nebo rovno pěti, takže pět možností, čtvrtá cifra je daná.

Celkem tedy máme $1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$ možností.

2. verze: Nechť dekadický zápis původního kódu je $abc4$ a nového $epqe$. Vzhledem k zadání platí $650 = abc4 - epqe = 10(abc - epq) + 4 - e$. Jelikož a, b, c, p, q, e jsou jednociferná přirozená čísla a jelikož $4 - e = 10(65 + epq - abc)$, tak $10|4 - e$ a tedy $4 - e = 0$ a $e = 4$. Nové číslo je tudíž ve tvaru $4pq4$. Dále víme, že $p = D(b, 4)$ a $b - 5 = q$, tedy $b = 5 + q5 + 0$. Z toho $(b, q, p) = (b, b - 5, D(b, 4)) \in \{(5, 0, 1), (6, 1, 2), (7, 2, 1), (8, 3, 4), (9, 4, 1)\}$. Vidíme, že cifru b můžeme zvolit pěti způsoby. Dále: $abc4 = 650 + 4pq4 \geq 650 + 4434 = 5084$, tedy $5 \geq a$. Analogicky $abc4 = 650 + 4pq4 \geq 650 + 4104 = 4754$, tedy $a \geq 4$. Může tedy nastávat $a = 5$ nebo $a = 4$, což jsou dva způsoby.

Cifry a a b na sobě nejsou nijak závislé, proto mám $2 \cdot 5 = 10$ možností pro původní kód.

Úloha 4. *Asistent má před sebou lichoběžník TIME, kde strany TI a ME jsou na sebe rovnoběžné. Nechť S je střed strany TI. Dokažte, že pokud je úhlopříčka TM osou úhlu EMS, je trojúhelník TIM pravoúhlý.*

$TI \parallel ME$, tedy úhly EMT a MTS mají stejnou velikost. Jelikož TI je osou úhlu EMS, pak i úhel TMS je má stejnou velikost jako předchozí dva. Tím pádem je trojúhelník TMS rovnoramenný se základnou TM a $|TS| = |MS| = |SI|$. Tedy body T, I, M leží na jedné kružnici se středem S, což je však Thaletova kružnice nad průměrem TI. Proto je trojúhelník TIM pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu M).

Úloha 5. *Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Nechť V je střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku s poloměrem 3cm a T jeho těžiště. Kružnice vepsaná se dotýká stran AB a BC popořadě v bodech P a Q. Víme, že úhel CTQ je pravoúhlý a |CV| = 5cm. Jaký je obsah trojúhelníka TVQ?*

Délka výšky v trojúhelníku ABC na stranu AB je rovna $|CV| + |VP| = 5 + 3 = 8$ cm. Těžiště leží ve dvou třetinách těžnice, tedy $|CT| = 8/3\ cm = 2,67\ cm$. Úhel CQV je pravý, $|CV| = 5\ cm$, $|VQ| = 3\ cm$ a podle Pythagorovy věty tedy $|CQ| = 4\ cm$. Pokud je úhel CTQ pravý, je úsečka TQ výška v trojúhelníku CVQ, tedy podle Eukleidovy věty o výšce $|TQ|^2 = |TC|$. $|TV| = 8/3 \cdot (5 - 8/3) = 56/9$. Z Pythagorovy věty v CTQ ale musí platit $|CQ|2 = |CT|^2 + |TQ|^2$, což ale není platná rovnost, jak zjistíme dosazením. Trojúhelník tedy neexistuje.

Úloha 6. *Asistent ve svých výpočtech počítal s tím, že součin jakýchkoli dvou přirozených čísel je roven součinu jejich nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele. Není si však z hlavy jistý, jestli je toto tvrzení skutečně pravdivé. Dokažte, že se nemýlil a tvrzení je pravdivé.*

Mějme dvě přirozená čísla a, b. Jistě $a = dq, b = dr$, kde $d = D(a, b)$ a $D(q, r) = 1$. Potom však $n(a, b)$ je nejmenší číslo, které dělí dq i dr, tedy $n(a, b) = xdr = ydq$ pro nejmenší možná x, y. Po vydělení obou stran rovnosti dqx dostáváme $r/q = y/x$. Jelikož $D(q, r) = 1$, je zlomek r/q v základním tvaru a proto $y = kr \geq r$ a $x = lq \geq q$. Nejmenší x a y jsou tedy $x = q$, $y = r$, tedy $n(a, b) = dqr$ a tedy $ab = d^2qr = D(a, b)n(a, b)$.

Úloha 7. *Každý bod v rovině je obarven buď červenou, nebo modrou barvou. Dokažte, že v této rovině můžeme najít rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník se všemi vrcholy stejné barvy.*

Vezměme čtverec a spojnicemi středů protějších stran ho rozdělme na čtyři shodné čtverce. Uvažujeme-li vrcholy těchto čtverců, každé tři vrcholy menších čtverců a velkého čtverce jsou vrcholy rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka. Stejně tak libovolná trojice středů stran. Pokud se budeme snažit tento útvar obarvit tak, aby žádný rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník neměl všechny vrcholy stejné barvy, rychle zjistíme, že žádné takové obarvení neexistuje.