Řešení Druhé Série

Úloha 1. *Aby proletěl sítí šachet co nejrychleji, musel profesor využít faktu, že obvod čtyřúhelníku je vždy větší, než součet jeho úhlopříček. Dokažte, že tomu tak skutečně je.*

Podle trojúhelníkové nerovnosti je součet dvou stran trojúhelníku větší než strana třetí. Úhlopříčka a dvě strany čtyřúhelníku vždy tvoří trojúhelník. V každém takovém trojúhelníku platí:

$$|AB| + |BC| > |AC|$$
$$|BC| + |CD| > |BD|$$
$$|CD| + |DA| > |AC|$$
$$|DA| + |AB| > |BD|$$

Po sečtení všech nerovností a jejich úpravě dostáváme:

$$(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) > (|AC| + |BD|)$$

Tím je důkaz hotov.

Úloha 2. *Laboratorní deník měl původně 1000 listů (očíslovaných od 1 do 1000). Asistenti vytrhli všechny listy, jejichž číslo bylo součinem několika (tzn. dvou a více) stejných přirozených čísel. Kolik listů v deníku chybělo?*

Z deníku byly vytrhané listy, jejichž pořadové číslo bylo součinem několika stejných přirozených. čísel, tedy bylo nějakou mocninou přirozeného čísla.

- Druhých mocnin přirozeného čísla, které jsou menší než 1000, je celkem 31, protože $32 \cdot 32 > 1000$. Máme tak 31 vytrhaných listů.
- Třetích mocnin (tj. součinů tří stejných přirozených čísel) menších nebo rovných 1000 je 10, ale třetí mocniny 1, 4 a 9 jsme již započítali u druhých mocnin. Takže máme dalších 7 vytržených listů.
- Mocniny jedničky jsou rovny jedné, proto dále nebudeme jedničku uvažovat.
- Čtvrté mocniny jsou již obsaženy v druhých mocninách.
- U pátých mocnin získáme už jenom 2 nové listy 2^5 a 3^5, protože další páté mocniny jsou větší než 1000.
- Šesté mocniny jsou obsaženy ve druhých i ve třetích mocninách. Stejně tak nemusíme počítat s osmými a devátými mocninami, protože 8 ani 9 nejsou prvočísla.
- Vyšší mocniny 2 už přesáhnou 1000 ($2^{10} = 1024 > 1000$).
- Poslední vytržený list, který jsme ještě nezapočítali je 2^7. Další sedmé mocniny už jsou větší než 1000.

Celkem tedy chybělo $31 + 7 + 2 + 1 = 41$ listů.

Úloha 3. *Profesor potřebuje znát přesnou vzdálenost každého z asistentů od laseru. V místnosti je jen jedna židle, jeden laser a oba asistenti. Profesor si rychle uvědomil tato fakta:*

- *Mezi laserem a asistentem-A stojí židle (ne nutně uprostřed).*
- *Oba asistenti jsou od sebe vzdálení 5 metrů.*
- *Úhel „asistent-B, asistent A, laser“ činí* 45^o
- *Trojúhelník „asistent-B, laser, židle“ je pravoúhlý (s pravým úhlem u židle) a jeho obsah je 10 m čtverečních.*

Jak daleko jsou oba asistenti od laseru?

Označme si laser jako L, židli jako Z, asistenta-A jako A a asistenta-B jako B.

Trojúhelník AZB je pravoúhlý s pravým úhlem u Z. Protože je $|\angle ZAB| = 45^o$, je $|\angle ZBA| = 180^o - 90^o - 45^o = 45^o$, a tedy trojúhelník AZB je i rovnoramenný.

Pro délku $x = |AZ| = |ZB|$ platí Pythagorova věta $2x^2 = 5^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Nyní najdeme délku $y = |ZL|$. Protože je trojúhelník LBZ pravoúhlý, platí pro jeho obsah:

$$\frac{xy}{2} = 10$$
$$\frac{\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} \cdot y}{2} = 10$$
$$y = 4 \cdot \sqrt{2}$$

Podle Pythagorovy věty je tedy $|BL| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{178}{2}$.

Pro délku $|AL|$ platí, že $|AL| = x + y = \frac{13\cdot\sqrt{2}}{2}$.

Asistent-B je od laseru vzdálen $\frac{\sqrt{178}}{2} \doteq 6,67m$ a asistent-A je od laseru vzdálen $\frac{13\cdot\sqrt{2}}{2} \doteq 9,19m$.

Úloha 4. *Profesor si pamatoval, že kód k záložnímu zdroji je počet palindromů (čísla, které se čtou odpředu stejně jako odzadu) od 1 do sedmiciferných čísel včetně. Jaký byl záložní kód?*

Nejdříve vypočítám počet palindromů mezi jednocifernými přirozenými čísly: Jsou to všechna čísla 1 až 9, takže je jich 9.

Vypočítám počet palindromů mezi dvojcifernými přirozenými čísly: Jsou to ta čísla, která mají obě cifry stejné (11, 22, ..., 99) – těch je taky 9.

Vypočítám počet palindromů mezi trojcifernými přirozenými čísly: Jsou to ta čísla, která mají stejnou číslici na místě stovek a jednotek. Těch je v každé stovce 10 (101, 111, ... 181, 191), takže jich je celkově 90 ($9 \cdot 10 = 90$).

Vypočítám počet palindromů mezi čtyřcifernými přirozenými čísly: Jsou to ta čísla, která mají stejnou číslici na místě tisíců a jednotek a zároveň mají stejnou číslici na místě stovek a desítek. Těch je v každém tisíci 10 (1001, 1111, ... 1881, 1991), takže jich je celkově 90 ($9 \cdot 10 = 90$).

Vypočítám počet palindromů mezi pěticifernými přirozenými čísly: Jsou to ta čísla, která mají stejnou číslici na místě desetitisíců a jednotek a zároveň mají stejnou číslici na místě tisíců a desítek. Těch je v každém tisíci 10 (10001, 10101, 10201, ..., 10901), takže v každém desetitisíci jich je 100 ($10 \cdot 10 = 100$) a celkově mezi pěticifernými čísly 900 ($9 \cdot 100 = 900$).

Vypočítám počet palindromů mezi šesticifernými přirozenými čísly: Jsou to ta čísla, která mají stejnou číslici na místě statisíců a jednotek a zároveň mají stejnou číslici na místě desetitisíců a desítek a ještě na místě tisíců a stovek a těch je v každém desetitisíci 10 (100001, 101101, 102201, ..., 109901), takže v každém statisíci jich je 100 ($10 \cdot 10 = 100$) a celkově mezi šesticifernými čísly 900 ($9 \cdot 100 = 900$).

Vypočítám počet palindromů mezi sedmicifernými přirozenými čísly: Jsou to ta čísla, která mají stejnou číslici na místě miliónů a jednotek a zároveň mají stejnou číslici na místě statisíců a desítek a ještě na místě desetitisíců a stovek. Těch je v každém desetitisíci 10 (1000001, 1001001, 1002001, ..., 109901), takže v každém statisíci jich je 100 ($10 \cdot 10 = 100$), v každém miliónu pak 1000 ($10 \cdot 100 = 1000$) a celkově mezi sedmicifernými čísly 9000 ($9 \cdot 1000 = 9000$).

Záložní kód je tedy 10998.

Úloha 5. *Po kruhové dráze běhají rovnoměrnou rychlostí 2 geneticky upravení křečci. Když běží proti sobě, střetnou se každých 10 vteřin. Kdyby utíkali stejným směrem, dohonil by jeden druhého každých 170 vteřin. Jaká je jejich rychlost, když délka dráhy je 170 cm?*

Rychlost prvního křečka si označme jako x a rychlost druhého křečka jako y.

První křeček uběhne za 10 vteřin $10x$ centimetrů.

První křeček uběhne od každého střetnutí $(170 - 10x) = 10y$ centimetrů.

Když běží stejným směrem, uběhne první křeček $170x$ centimetrů a druhý křeček $170y$ centimetrů.

První uběhne o 1 kolo víc, protože je rychlejší.

Máme tedy dvě rovnice o dvou neznámých, což lze jednoduše vyřešit:

$$\begin{aligned} 170 - 10x &= 10y \\ 170x - 170x &= 170 \\ x &= 9\frac{cm}{s} \\ y &= 8\frac{cm}{s} \end{aligned}$$

První křeček běhá rychlostí $9\frac{cm}{s}$, zatímco druhý křeček běhá rychlostí $8\frac{cm}{s}$.

Úloha 6. *Stroj času C610 je v tomto stavu schopný pouze posunu o deset, nebo dvacet let do minulosti. Takovýchto posunů může udělat libovolně mnoho, ale nikdy se nemůže vrátit zpátky (tedy časově vpřed). Kolika různými způsoby se může profesor dostat ze současnosti (rok 2015) do roku 1905? Dva způsoby jsou různé, pokud existuje letopočet, ve kterém jsme při jednom způsobu zastavili a při druhém ne.*

Úlohu si můžeme převést na situaci, kdy se snažíme přejít na 11 kámen, pokud při každém kroku popojdeme o 1 nebo o 2 kameny dopředu. Zjišťujme rovnou, kolika způsoby se dá přejít n kamenů, označme tento počet $P(n)$. Řešením úlohy je pak $P(11)$.

Všimněme si, že na n-tý kámen se dá dostat buď z $(n-1)$. kamene, nebo z $(n-2)$ kamene. To tedy znamená, že počet způsobů $P(n)$, jak se dostat na n-tý kámen, se vypočítá jako součet způsobů, jak se dostat na $(n-1)$. kámen a na $(n-2)$. kámen. Platí tedy, že $P(n) = P(n-1) + P(n-2)$. Snadno zjistíme, že na 1. kámen se dá dostat jedním způsobem, na 2. kámen dvěma způsoby – buďto na první kámen stoupneme nebo ne. Tedy $P(1) = 1$ a $P(2) = 2$.

Nyní již snadno dopočítáme další hodnoty: $P(3) = 3, P(4) = 5, P(5) = 8, P(6) = 13, P(7) = 21, P(8) = 34, P(9) = 55, P(10) = 89, P(11) = 144$.

Do roku 1905 se jsme tedy schopni dostat 144 způsoby.

Úloha 7. *Kolem stromu je omotaný obří had. Plaz kolem stromu obkroužil rovných osm závitů, a měl tak hlavu ve výšce čtyř metrů, dotýkajíce se koncem ocasu země. Průměr pařezu byl osmdesát centimetrů. Jak byl had dlouhý?*

Had obkroužil pařez v osmi závitech. Stačí nám vypočíst délku jednoho závitu, celková délka hada pak bude osmkrát větší. Jeden závit je obkroužen na válci o průměru 80 cm a výšce $400 : 8 = 50cm$. Rozvineme-li plášť tohoto válce do roviny, dostaneme obdélník. Had v něm tvoří úhlopříčku.

Stačí nám spočítat délky stran a úhlopříčky obdélníka. Jedna strana obdélníka je vlastně výška jednoho závitu, tedy má délku b = 50 cm. Druhá strana je obvod kruhové podstavy válce, tedy obvod kruhu o průměru $d = 80cm$, což je $a = \pi \cdot d \doteq 3,1415 \cdot 80cm = 251,32cm$.

Délka úhlopříčky v našem obdélníku je (podle Pythagorovy věty):

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{251,32^2 + 50^2} \doteq 256,25cm$$

Celková délka hada je tedy asi 20,5 m.