

# ZADÁNÍ PÁTÉ SÉRIE

TERMÍN ODEVZDÁNÍ: 20. 6. 2014

Od velkých Komářích soubojů neuplynul ještě ani měsíc a naše království má už zase napilno. Přiletí totiž velmi vzácná návštěva, sám král Krásnopich ze země Tlejícího močálu. Sosanda samozřejmě řádí jako černá ruka a vyžaduje, aby bylo vše perfektně nachystáno. Služební si ale dávají záležet i z jiného důvodu - protože naše známá, komorná Krvesanda, viděla ležet na nočním stolku královny dopis. A v něm král vyznával Sosandě svou lásku. Krásnopich je spravedlivý a hodný vládce. Kdyby se mu podařilo udolat její kamenné srdce, mohl by v království konečně zavládnout mír a klid.

**Úloha 0.** *Představte si, že jste Král Krásnopich a napište formální dopis Sosandě, ve kterém se jí budete dvořit.*

Sosanda chce na Krásnopicha udělat dojem, a tak si nechala postavit před svůj palác nový bazén s mnoha vodotrysky. Jámu už dělníci vykopali, jen s naplněním jsou problémy. Stihne se naplnit vodou z močálu dřív, než král přijede?

**Úloha 1.** *Kvádrový bazén má dno o rozměru 13 a 20 metrů, přičemž jeho hloubka činí 1,5 metru. Jedním přítokem do bazénu přitéká 1,2 hektolitrů močálové vody za minutu a druhým zase 0,5 litru vody za sekundu. Za jak dlouho bude bazén naplněn ze 70 %?*

Naplnění bazénu se naštěstí stihlo včas, vše je již poklizeno, navařeny a napečeny jsou vybrané dobroty a celý komářský národ stojí v ulicích. Každý chce zahlédnout alespoň na kratičkou chvíli krále. Na náměstí je mnoho stánků s nejrůznějším zbožím a dokonce se zde prodávají i obrázky s podobiznou Krásnopicha. A právě po nich zatoužily dvě mladé komářice, Rychloletka a Pěkněbzunda.

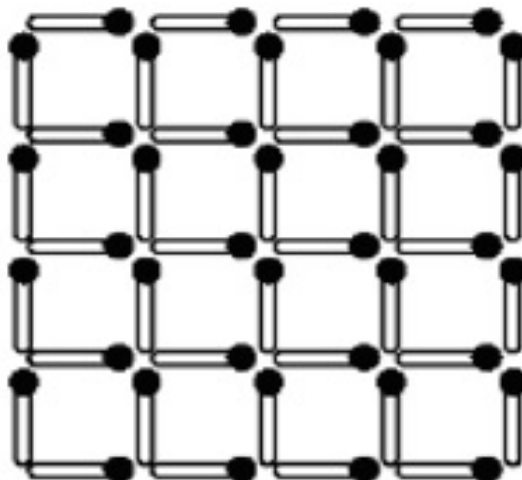
**Úloha 2.** *Rychloletka a Pěkněbzunda si chtějí koupit královu podobiznu. Pěkněbzundě chybí ke koupi 100 Sosů, Rychloletce jen 1 Sos. Složily se, aby si koupily jednu podobiznu dohromady, ale stejně jim peníze nestačily. Kolik podobizna stála?*

A už prolétává davem Krásnopich se svou družinou, na všechny se usmívá a kyne jim. Když dorazil až před zámek k již netrpělivě čekající Sosandě, zdvořile se s ní přivítal a ona mu i jeho družině nabídla pohoštění a 130 džbánek krve. Král je přijal s povděkem a rozhodl se džbánky rozdělit mezi svůj doprovod podle toho, jak mu komáři byli během cesty nápomocni.

**Úloha 3.** *Rozdělte mezi 4 komáry 130 džbánek krve tak, aby každý komár dostal o polovinu více než ten předchozí.*

Poté se celá skupina přesunula k obrovskému bazénu, kde již byly nachystány všemožné druhy zábavy. Hrál hudba i počasí jim přálo. Královna byla jako vyměněná, nemohla z Krásnopicha spustit oči. Velmi se jí líbil a když jí položil logickou úlohu, (věděl, že má ráda matematiku a tak se doma pečlivě připravoval) byla tak rozrušená, že téměř nedokázala přijít na správný výsledek. Pak mu ale oplatila stejnou mincí.

**Úloha 4.** a) Ze 40 zápalek je sestaven čtverec 4 krát 4 zápalky. Obrázec obsahuje také menší čtverce o rozměrech 3 krát 3, 2 krát 2 a 1 krát 1. Cílem je odebrat 9 zápalek tak, aby nezůstal ani jeden čtverec žádné velikosti.



b) Ostrov je obydlen čestnými komáry, kteří vždy hovoří pravdu, a padouchy, kteří vždy lžou. Na ostrově žije 2009 komárů. Každý z nich buď rád zpívá, nebo rád pije krev, nebo rád počítá. Každému komárovi byly položeny tři otázky:

Zpíváte rád?  
Pijete rád krev?  
Počítáte rád?

1000 komárů odpovědělo „ano“ na první otázku, 700 na druhou a 500 na třetí. Kolik padouchů žije na ostrově?

Krásnopichovi se ale dlouhé hodiny tréninku vyplatily a nenechal se zahanbit. Sosanda byla unešená jeho inteligencí a šarmem, a tak ve chvíli, kdy ji požádal o ruku, nemohla odpovědět jinak, než že souhlasí. Hned se začala chystat svatba, král vybral tři rychlé komáry a poslal je na své panství s velkou novinou a pozvánkami ke svatebnímu stolu. Každý měl letět co nejrychleji a měli povoleno dodávat si energii zázračnými nápoji.

**Úloha 5.** Krvosos, Křídlohvizd a Bzučil letí do království vzdáleného 10 km. Na každém druhém kilometru je stánek s občerstvením. V každém stánku se podává nápoj jednoho druhu: červený, zelený nebo žlutý. Stánek s červeným a žlutým nápojem nikdy nestojí vedle sebe. Komáři vyletěli od Sosandina království jednotně rychlostí 10 km/h. Po napití se u komárů zvyšuje rychlost následujícím způsobem:

	červený nápoj	zelený nápoj	žlutý nápoj
Krvosos	+1 km/h	+2 km/h	+3 km/h
Křídlohvizd	+2 km/h	+1 km/h	+2 km/h
Bzučil	+2 km/h	+1 km/h	+4 km/h

*Krvosos doběhl do cíle rychlostí 18 km/h, Křídlohvizd 16 km/h a Bzučil 18 km/h.*

- a) Najděte libovolný způsob, jak mohly být nápoje rozmístěny. Zjistěte pro toto rozmístění, kdo byl v zemi Tlejícího močálu první.*
- b) Najděte všechny způsoby, jak mohly být nápoje rozmístěny.*

V Krásnopichově království byli všichni rádi, že si jejich král konečně našel nevěstu. A pozvaní hosté chtěli přivést na hostinu specialitu močálovské kuchyně. Patří totiž k tradici a jídelníčku králova rodu. S dopravou ale nastaly komplikace. V jejich království totiž uveze takovýto náklad pouze vycvičený pavouk, který se živí jen těmito specialitami.

**Úloha 6.** *V království Tlejícího močálu je nachystáno 3000 specialit. Pavouk jich má co nejvíce dopravit do Sosandina království. Musí jít ale kvůli močálům obrovskou oklikou – cesta je dlouhá 1000 km. Vlastní spotřeba pavouka je 1 specialita na 1 km. Navíc pavouk unese maximálně 1000 specialit. Kolik specialit se hostům podaří dopravit do Sosandina království? Jak cestu zorganizují?*

Takovou svatbu jako byla ta Sosandy a Krásnopicha komáří svět nepamatoval. Jedlo se, pilo, počítalo a královna jen zářila štěstím. Už nikoho neposílala do vězení, ani nekřičela, jen se láskyplně dívala na svého manžela a ve všem ho poslouchala. Dokonce mu dala plnou moc nad svým královstvím. A tak se z místních komárů stal šťastný národ, který dokonce rád a beze strachu z chybných odpovědí počítal matematické příklady.

# KOMBINATORIKA

## DÍL PÁTÝ

Máme tu poslední sérii v tomto školním roce a spolu s ní i poslední díl seriálu o kombinatorice. V tomto dílu si povíme, co jsou to **permutace**. Budeme přitom často používat pravidlo součinu, které jsme se naučili používat v prvním dílu. Jako obvykle začneme nejprve příkladem.

**Příklad.** *Anagram neboli přesmyčka je slovo, které vznikne z původního slova tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí. Například slovo chleba je anagramem ke slovu blecha. Kolik různých anagramů můžeme vytvořit ze slova KOMÁR? Budeme počítat i takové anagramy, které nedávají smysl, např. RÁMOK. A slovo KOMÁR budeme také považovat za anagram samo k sobě.*

**Řešení.** Každý anagram si představíme jako pětiprvkovou uspořádanou množinu, ve které je prvním prvkem první písmeno, druhým druhé písmeno... a pátým prvkem páté písmeno. První prvek vybíráme z pěti možností, druhý po výběru prvního už jenom ze čtyř (písmena se nemohou opakovat), třetí po výběru prvních dvou už jenom ze tří... a pátý prvek po výběru všech předchozích prvků už vybíráme jenom z jedné možnosti. Podle pravidla součinu tedy existuje  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  anagramů ke slovu KOMÁR.

Protože zapisovat součiny ve tvaru  $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  je hrozná otrava, vymysleli matematici zjednodušený zápis, kterému se říká **faktoriál**. Faktoriál čísla  $n$  je číslo, které vznikne vynásobením všech kladných celých čísel menších nebo rovných  $n$ . Zapisuje se přidáním vykřičníku za číslo, ze kterého chceme faktoriál spočítat. Např.

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \\ 100! &= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\ n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Speciálním případem je faktoriál nuly. U něj se jedná o prázdný součin, a proto se definuje zvlášť jako  $0! = 1$ .

Vrátíme se zpět k příkladu s anagramy. U příkladu se slovem KOMÁR se písmena ve slově neopakovala (slovo obsahovalo pouze jedno písmeno K, jedno písmeno O atd.). Jak by tomu ale bylo v případě, kdyby se některá písmena opakovala?

**Příklad.** *Kolik různých anagramů můžeme vytvořit ze slova MATEMATIKA?*

**Řešení.** Představme si, že by všechna písmena byla různá. To můžeme zařídit tak, že si první  $M$  označíme jako  $M_1$ , druhé  $M$  jako  $M_2$  atd., s tím, že písmena  $M_1$  a  $M_2$  považujeme za různá písmena. Hledáme tedy počet anagramů ke slovu  $M_1 A_1 T_1 E M_2 A_2 T_2 I K A_3$ . V takovém případě bychom úlohu řešili stejným způsobem jako u prvního příkladu a vyšlo by nám, že počet anagramů je roven  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ , tedy  $10!$ .

Tímto způsobem jsme ale započítali každé slovo několikrát. Například anagram AKI-TAMETAM jsme započítali jako  $A_2KIT_1A_1M_2ET_2A_3M_1$  i jako  $A_3KIT_2A_1M_1ET_1A_2M_2$  atd. Každý anagram jsme započítali tolikrát, kolikrát je možné rozmístit číslice 1,2,3 u písmen  $A$ , číslice 1,2 u písmen  $T$  a číslice 1,2 u písmen  $M$ . Počet způsobů jak rozmístit číslice u písmen  $A$  je podle pravidla součinu  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ , u písmen  $T$  existuje  $2!$  možných rozmístění a u písmen  $M$  také  $2!$  rozmístění. Podle pravidla součinu pak platí, že existuje  $3! \cdot 2! \cdot 2! = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$  možností, jak můžeme rozmístit číslice u každého z anagramů.

Každý anagram jsme tedy započítali  $24 \times$ . Existuje tedy celkem  $\frac{10!}{24} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{24} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$  různých anagramů ke slovu *MATEMATIKA*.

Nyní si definujeme, co jsou to **permutace**:

**Definice.** Permutace bez opakování  $n$ -prvkové množiny (ve které jsou všechny prvky různé) je uspořádaná  $n$ -tice, která má stejný počet prvků jako původní množina. Počet permutací bez opakování je  $n!$ .

U našeho prvního příkladu se slovem KOMÁR se tedy jednalo o permutace bez opakování pětiprvkové množiny  $\{K, O, M, \acute{A}, R\}$ . To znamená, že  $n = 5$  a počet těchto permutací je tedy roven  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

**Definice.**  $n$ -prvková permutace s opakováním  $k$ -prvkové množiny je uspořádaná  $n$ -tice, ve které se první prvek vyskytuje  $n_1$ -krát, druhý prvek  $n_2$ -krát... až  $k$ -tý prvek  $n_k$ -krát. (Zároveň musí platit, že  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .) Počet permutací s opakováním je roven

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

U druhého příkladu se slovem MATEMATIKA se jednalo o permutace s opakováním šestiprvkové množiny  $\{M, A, T, E, I, K\}$ . První písmeno se mělo v permutaci vyskytovat dvakrát, takže  $n_1 = 2$ , druhé třikrát, takže  $n_2 = 3$ , třetí dvakrát, takže  $n_3 = 2$  a zbylá písmena se v ní měla vyskytovat pouze jedenkrát, takže  $n_4 = n_5 = n_6 = 1$ . Číslo  $n$  je tedy rovno  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$ . Můžeme tedy spočítat počet těchto permutací jako

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200.$$

A nyní nastal čas, abyste si i vy vyzkoušeli počítání s permutacemi na seriálové úloze:

**Úloha 7.** *Kolik existuje anagramů ke slovu ABRAKADABRA?*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO)*, reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ