Zadání Páté Série

Termín Odevzdání: 15. 4. 2013

A tak se začala připravovat velká bitva. Kvadratické rovnice si přiostřovaly své koeficienty, zatímco komár Bonifác s významnými funkcemi začal připravovat strategii metody porovnávání koeficientů mnohočlenů. „Elipsy a kružnice využijeme jako štíty,“ radil Sinus. „Jehlany a kužely bychom měli využít na prorážení tvrdého a měkkého i ve vyjmenovaných slovech,“ navrhoval starý a zkušený bojovník Arcus Tangens.

Úloha 0. *Popište, jak by měla vypadat a co by měla obsahovat zbrojnice správného matematika. Nezapomeňte doplnit obrázky!*

Nakonec komár Bonifác přišel na nejlepší strategii: „Využijeme derivací, které jsou velmi mocné a v bitvách se už mnohokrát proslavili. Musíme je ale najít, protože jsou schované v jeskyních ve velkých horách na severu.“ Všichni s Bonifácem souhlasili a pověřili ho, aby derivace našel a přivedl na pomoc. Bonifác se rychle vypravil, a protože do bitvy zbývalo už málo času, tak použil k přepravě vysokorychlostní lamu, která je nejrychlejším dopravním vozidle v Ludolfově údolí.

Úloha 1. *V rozích A, B, C čtverce $ABCD$ stojí lamy. všechny zaráz vyrazí proti směru hodinových ručiček po obvodu čtverce. Lama A urazí stranu čtverce za minutu, lama B za tři minuty a lama C za dvě minuty. V jakém čase od startu se poprvé všechny lamy potkají ve vrcholu D?*

Netrvalo dlouho a Bonifác se dostal až k horám na severu do jednoho údolí, kde měla bydlet jedna jeho stará známá derivace. Prošel pod kamenným obloukem, který se vypínal nad údolím už po staletí, a došel až k jeskyni, která byla na konci údolí. Na jeskyni byla vytesána pradávná úloha praprapraderivací.

Úloha 2. *Z rovnosti* $123456789 = 0$ *se poztrácela znaménka. Kolika způsoby lze na levou stranu doplnit ke každému číslu* $+$ *nebo* $-$ *tak, aby rovnost platila?*

Jenže derivace tu nebyla. Co ale teď dělat, když zítra má vypuknout bitva? Tu ale vyšel z temného koutu starý Integrál, který měl v dřívějších dobách střežit derivace, aby se nespolčily proti všem ostatním neexponenciálním. Potichu si pro sebe něco divného brumlal.

Úloha 3. *První den v dílně chybělo* 10 *procent ze všech pracovníků a vyrobilo se* 225 *ks výrobků. Druhý den chybělo dvakrát více pracovníků a každý pracovník vyrobil o* 8 *procent více výrobků, než předchozí den. Kolik výrobků bylo vyrobeno druhý den?*

„Dobrý den, pane Integrále, nevíte, kde se ukrývají derivace?“ zeptal se Bonifác Integrála. „To víš, Bonifáci, asi před rokem se konala volba královny derivací. Derivace se ale nemohly dohodnout, a tak se strhla bitva o královnu, která skončila katastrofou. Skoro všechny derivace při ní zahynuly a ještě velmi dlouho se z toho budou vzpamatovávat,“

odpověděl mu Integrál. „No jo, ale my jsme chtěli, aby nám derivace pomohli v bitvě proti jazykům a pravopisu. Co teď budeme dělat?“ řekl zklamaně Bonifác. „Poradím ti, ale nejprv poraď ty mně,“ odpověděl Integrál.

Úloha 4.

a) *Kolik přirozených čísel v rozmezí od* 1 *do* 1000 *obsahuje ve svém desítkovém zápise aspoň jednu trojku?*

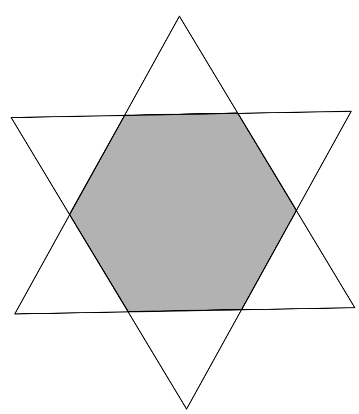
b) *Když vypíšeme všechna přirozená čisla od* 1 *do 1000, kolikrát napíšeme číslici* 3*?*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

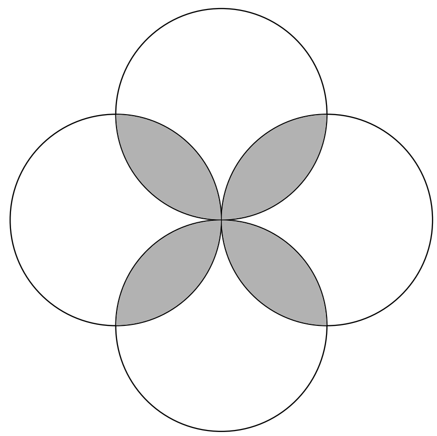
Bonifác úlohu rychle vyřešil. „Měli byste hledat ponaučení v tom, co se stalo derivacím, Bonifáci. Derivace vedly válku a teď můžeš vidět, jak to s nimi dopadlo. Měl bys raději, Bonifáci, hledat kompromisy a uzavřít mír místo toho, abys vedl válku, při které zničíte matematiku i jazyky, že už se pak nikdo s nikým nedomluví ani nic nevymyslí,“ vyčítavě odpověděl Bonifácovi Integrál. „Máš pravdu, Integrále, snad to ještě stihnu zastavit,“ vyhrkl Bonifác a pospíchal najít lamu, aby se dopravil zpět do Ludolfova údolí. Když dorazil, zjistil, že už všichni zaujmuli bojové pozice, ale bitva stále nezačala. Pozice mohly vypadat nějak takto:

Úloha 5.

a) *Rovnostranný trojúhelník* ABC *otočíme o* 180 *podle těžiště. Určete obsah vzniklého šestiúhelníku uprostřed.*



b) Máme dvě kružnice o stejném poloměru s vnějším dotykem. Orotujeme je podle bodu dotyku o 90 *stupňů a získáme nakreslený útvar. Jaký je obsah vybarvené části?*



(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Bonifác poručil, aby se všichni stáhli, že chce vyjednat mír a pověděl jim, co se stalo derivacím. Všichni pak ochotně souhlasili, a tak začali vyjednávat. Výsledkem mělo být uzavření Velkého matematicko-pravopisno-jazykového paktu o rovném postavení Matematiky a Jazyků. Pakt měl začínat znamým matematickým citátem:

Úloha 6. *Nechť a, b, c, d jsou čísla taková, že*

$$a + b = c + d$$
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Dokažte, že pak i $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$.

Trvalo to několik dní, ale nakonec se domluvili, protože nikdo už nechtěl válku a všichni chtěli podepsat ten slavný pakt (v duchu si mysleli, že se tím proslaví). Na počest uzavření míru a podepsání paktu byla uspořádána velká hostina. Všichni jedli, pili, počítali a přemýšleli nad tím, co by se stalo, kdyby neuzavřeli mír. No asi už by tu většina z nich nebyla. A tak od té doby už nikdy neměla být žádná válka.

Důkazové Metody

Díl Pátý

Držíte v rukou poslední leták prvního ročníku semináře KoMáR a s ním i poslední díl seriálu o důkazových metodách. Finální téma seriálu bohatě využije poznatků z dílů předchozích, půjde totiž o metodu **počítání dvěma způsoby**. Princip je jednoduchý - v dané úloze najdeme nějakou veličinu, kterou lze vyjádřit dvěma různými způsoby a následně z toho budeme těžit nějaké informace. Výsledkem může být například rovnice nebo soustava rovnic, invariant či spor.

Vzpomeňme si na 6. úlohu z letošní první série.

Příklad. *V díře je několik komárů a mušek. Každá muška se zná s pěti dalšími muškami a deseti komáry a každý komár se zná s šesti dalsími komáry a devíti muškami. Koho je v díře víc, mušek, nebo komárů?*

Řešení. Tato úloha je na počítání dvěma způsoby jako stvořená. Nechť m je počet mušek a k je počet komárů. Počítejme dvěma způsoby počet všech vztahů mezi muškami a komáry: každá muška zná 10 komárů, takže těchto vztahů je $10m$. Zároveň ale každý komár zná 9 mušek, takže těchto vztahů je $9k$. Dostáváme tím rovnost

$$10m = 9k,$$

ze které už snadno vidíme, že mušek je méně, protože je jich jen $\frac{9}{10}$ počtu komárů. ♣

Postup, který nám dvojitým počítáním téhož dá užitečnou rovnost, ještě jednou ukáže následující úloha.

Příklad. *Spočtěte součet řady*

$$S_n = 1 + 3 + 9... + 3^n.$$

Řešení. Předpokládejme, že už jsme S_n nějak spočítali. Jak nyní spočítáme S_{n+1}? To můžeme udělat **dvěma způsoby**: buď přičteme 3^{n+1}, nebo vynásobíme všechny sčítance trojkou a přičteme počáteční jedničku. Dostáváme tedy rovnost

$$S_{n+1} = S_n + 3^{n+1} = 3S_n + 1,$$

z čehož už snadno vyjádříme $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$. ♣

Než si náš nový trik sami vyzkoušíte na seriálové úloze, podívejme se ještě, zda jde aplikovat i v geometrii.

Příklad. *Lze sestrojit v rovině konvexní 365-úhelník tak, že velikosti všech jeho vnitřních úhlů jsou ve stupních celá čísla?*

Řešení. V této úloze vyjádříme dvěma způsoby průměrnou velikost vnitřního úhlu v takovém mnohoúhelníku. Jednak víme, že jeho vnitřní úhly jsou vyjádřené celočíselným počtem stupňů, takže každý úhel má nejvýše 179°, takže i velikost průměrného úhlu je nejvýše 179°. To máme první vyjádření. Ale my umíme velikost průměrného úhlu i přesně spočítat! V konvexním n-úhelníku je přece součet vnitřních úhlů $180(n-2)$, takže průměrná hodnota úhlu je pak

$$p = \frac{180(n-2)}{n},$$

což pro $n = 365$ dává přibližně $p = 179.014$, což je ve sporu s naším prvním odhadem! Takže jsme počítáním dvěma způsoby došli ke dvěma odporujícím si výsledkům a tedy ke sporu, takže takový 365-úhelník sestrojit nelze.

Nyní si už konečně můžete vyzkoušet novou metodu sami :-).

Úloha 7. *V každém políčku tabulky o 2012 řádcích a m sloupcích je vepsáno číslo tak, že v každém sloupci je součet 2 a pak v prvním řádku je součet 1, ve druhém řádku je součet 2 a tak dále až v posledním řádku je součet 2012. Kolik má tabulka sloupců?*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ