Zadání Druhé Série

Termín Odevzdání: 10. 12. 2012

V Ludolfově údolí pomalu ale jistě svítalo. Slunce lomilo své trilióny paprsků přes okenní tabulku a šimralo komára na jeho slepených křídlech.

Úloha 0. *Komár by spal ještě déle, ale spát mu nedalo přemýšlení. Snažil se vymyslet co nejzajímavější pravdivou sebereferenční větu - tj. větu která odkazuje sama na sebe. (Např.: Tato věta má právě šest slov.) Pomůžete mu, aby se příště mohl řádně vyspat?*

Nakonec po chvilce zamžoural, zvedl se, přehodil své tři páry nohou přes okraj odmocniny a zívnul. Dnes ho čekala spousta povinností. Aby také ne, když byl místním starostou.

Sklonil sosák do kulaté závorky plné lahodných činitelů a s úsměvem se podíval kruhovým oknem (ostatně, hromada věcí v jeho domě měla právě tvar kruhu) na Trojku se Čtyřkou, které už za časného rána trénovaly přehozy se znamínkem krát. V takových chvílích je ostatní komáři nazývali Tým Dvanáct.

Nesměl však dlouho otálet. Musel se důkladně připravit na dopolední zasedání řešící problematiku objemu koulí, kde on sám byl jedním z klíčových členů. Spolu se Čtyřkou na místě čitatele, Trojkou na místě jmenovatele (laškovně na sebe pokukujícími přes zlomkovou čáru) a několika znamínky krát, samozřejmě. Znamínka krát byla zde v Ludolfově údolí obecně žádaným zbožím.

Úloha 1. *Komár se musí co nejrychleji dostavit na schůzku, která se koná v 7. patře. Jak se tam Komár dostane z 12. patra, jestliže budova má celkem 20 podlaží (přízemí až 19. patro) a výtah obsahuje pouze dvě tlačítka - jedno vyveze výtah o 13 pater nahoru, druhé o 8 dolů?*

Naštěstí vše stihl včas, ale nervozita ho neopustila. Starost mu dělala nesympatická Třetí mocnina, sedící přímo naproti němu, a plno neznámých. Brr.

Úloha 2. *Třetí mocnina byla ze všech 12 zasedajících nejstarší. Kolik jí mohlo být nejvýše let, jestliže průměrný věk všech 12 zasedajících je 50 let a každému zasedajícímu je alespoň 42 let?*

Nicméně i přes jejich chladný vztah se zasedání zdálo být v pořádku. Třetí mocnina odkvačila domů, stejně jako Čtyřka, ale přišly Dvojka s Druhou mocninou, aby se mohly řešit každodenní záležitosti.

Úloha 3. *Jedním z problémů bylo doplnit další člen posloupnosti:*

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, \ldots$$

Zvládnete to také?

Nakonec vše potřebné vyřešili. Inu, mohl by to být zdánlivě parádní den, kdyby k večeru zničehonic schůze nebyla přerušena. Do zasedací místnosti se vřítil zděšený Sinus. „Pane Bonifáci!“ pohlédl na komára: „Máme vážný problém. Do kabiny jmenovatele v naší zlomkové bojové lodi se dostala Nula a hrozí, že vše vyhodí do povětří!“ Bonifác sebou trhl, ale jednal bez zaslepení. „Musíme ji nějak odstranit! Nalákáme ji.“

Úloha 4. *Aby odlákali Nulu ze jmenovatele, nabídli jí Double šťávu. Nula, Dvojka, Trojka, Čtyřka a Druhá mocnina stojí ve frontě na plechovku Double šťávy v tomto pořadí. První člověk ve frontě (Nula) dostane Double šťávu, vypije ji a rozdvojí se. Obě Nuly se pak připojí na konec fronty. Potom plechovku dostane další člověk ve frontě (Dvojka), také ji vypije a obě Dvojky se připojí na konec fronty. Tento proces se pak opakuje pořád dokola.*
a) *Kdo dostane stou plechovku?*
b) *Kdo dostane miliontou plechovku?*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Nakonec se jim podařilo Nulu odlákat a vítězoslavně si oddechli. Stále však hrozilo, že by se Nula mohla vrátit. „Dvojko, musíš loď zabezpečit. Nula se už nikdy nesmí dostat do jmenovatele!“ rozdával Bonifác rozkazy. „Rozdělíme loď zdí.“ Nula však byla velice zákeřná a v žádném případě nechtěla dostat méně prostoru, než jiní dohromady. Museli tedy postavit zeď ušitou Nule na míru.

Úloha 5. ***a)*** *Loď má půdorys ve tvaru trojúhelníka ABC. Na straně AB zvolte bod P tak, aby se Nula necítila ošizená, tj. aby trojúhelníky APC a BPC měly stejný obsah.*
b) *Loď má půdorys lichoběžníka $ABCD$ se základnami AB a CD, kde $|AB| > |CD|$. Na straně AB sestrojte bod P tak, aby se Nula necítila ošizená, tj. aby trojúhelník APC měl stejný obsah jako čtyřúhelník $PBCD$.*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Vše se vydařilo. Bonifác si spokojeně broukl pod vousy, chci říct pod sosák, rozumějte mi. Ten večer museli přerušit dumání nad obsahem a obvodem kruhů. Zato ale dokázali přechytračit nulové hodnoty a ukázat tak mladým komárkům, že na řešení sporů není potřeba vždy zrovna složitá matematika. A tu ho napadl jeden starý známý příklad:

Úloha 6. ***Malošem*** *přirozeného čísla nazveme jeho nejmenšího dělitele většího než* 1. ***Velkošem*** *přirozeného čísla nazveme jeho největšího dělitele menšího než samotné číslo. Najděte všechny dvojice po sobě jdoucích přirozených čísel takových, že i jejich maloši jsou po sobě jdoucí čísla a jejich velkoši jsou po sobě jdoucí čísla.*

Když ulehal na odmocninu, po dlouhé době mu na tváři pohrával spokojený úsměv.

Důkazové Metody

Díl Druhý

Vítejte u druhého dílu seriálu o důkazových metodách v matematice. V tomto článku se budeme věnovat velmi elegantnímu přístupu k problémům - metodě **důkazu sporem**. Řekněme si nejprve přibližnou strukturu této metody:

- Řekněme, že dokazujeme tvrzení A.
- Předpokládejme, že tvrzení A neplatí.
- Nyní se budeme snažit sledem logických kroků dojít k tvrzení, které je evidentně špatně - k tzv. **sporu**. Může to být rozpor se zadáním nebo i obecně neplatné tvrzení, třeba 1 = 2 nebo že je liché číslo dělitelné dvěma.
- Pokud se nám povedlo dojít od předpokladu, že tvrzení A neplatí, až ke sporu, znamená to, že tento předpoklad nemůže být pravda - pokud by platil, platilo by i ono sporné tvrzení. Z toho plyne, že naše tvrzení A musí platit a jsme hotovi!

Ukažme si tuto myšlenku na jednoduchém příkladě.

Příklad. *Ve škole je 400 studentů. Dokažte, že mezi nimi existují dva, kteří mají narozeniny ve stejný den.*

Řešení. Nejprve tedy zformulujeme předpoklad, že zadané tvrzení neplatí - tj. předpokládejme, že žádní dva studenti nemají narozeniny ve stejný den. Nyní se pokusíme logickými kroky dojít ke sporu. Existuje 366 možných dat, kdy může mít člověk narozeniny. Pokud tedy předpokládáme, že žádní dva studenti nemají narozeniny ve stejný den, tak je ve škole nejvýše 366 studentů, což je ale spor se zadáním, že je jich 400! Tudíž náš předpoklad o tom, že zadané tvrzení neplatí, musí být špatně - takže ono platí a někteří dva studenti nutně mají narozeniny ve stejný den.

$\square$

Když rozpoznáme, že bychom chtěli úlohu řešit sporem, je dalším podstatným krokem uvědomit si, co bude oním sporným tvrzením - na další úloze si ukážeme, že je výhodné předpokládat co nejvíce to jde.

Příklad. *Reálná čísla, která můžeme zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla, nazýváme racionální. Ostatním číslům pak říkáme iracionální. Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.*

Řešení. Povaha úlohy naznačuje, že ji budeme chtít řešit sporem a předpokládat, že existují čísla p, q taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Kdybychom na tomto místě s předpoklady skončili, je úloha stále rozumně řešitelná, ale zbytečně složitě (to si může čtenář rozmyslet jako cvičení). My však můžeme předpokládat ještě něco navíc - a sice, že čísla p, q jsou nesoudělná, tj. že zlomek $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru. To si jistě můžeme dovolit, protože kdyby existoval jejich společný dělitel větší, než 1, mohli bychom jím zlomek zkrátit.

S tímto předpokladem v rukou nyní upravíme rovnici $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$:
umocníme obě strany na druhou

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

a přenásobíme rovnici q^2

$$2q^2 = p^2.$$

Na levé straně rovnice je sudé číslo, takže i na pravé straně rovnice je sudé číslo, tj. p^2 je dělitelné dvěma. Nicméně, 2 je prvočíslo, takže dělí-li p^2, dělí i p, takže p^2 je dělitelné dokonce čtyřmi. Pravá strana rovnice je tedy dělitelná čtyřmi - musí být dělitelná čtyřmi i levá strana rovnice, což zejména znamená, že q^2 je dělitelné dvěma, takže máme, že q je dělitelné dvěma. Ale co jsme zjistili? Čísla p i q jsou dělitelná dvěma, což je ale ve sporu s předpokladem, že jsou nesoudělná! Došli jsme ke sporu, takže taková čísla p, q zkrátka existovat nemohou a $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

$\square$

Než si zadáme seriálovou úlohu, na které si důkaz sporem sami vyzkoušíte, ukažme si ještě jednu velmi známou a starou úlohu, ve které se důkaz sporem ukazuje v celé své kráse.

Příklad. *Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.*

Řešení. Předpokládejme pro spor, že prvočísel je pouze konečně mnoho, řekněme n. Označme si je $p_1, p_2, ..., p_n$. Uvažme nyní číslo $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Toto číslo je zřejmě větší, než libovolné z prvočísel, ale protože je o 1 větší, než nějaký násobek každého z nich, není žádným z nich dělitelné. Máme tedy číslo, které není dělitelné žádným prvočíslem, takže je dělitelné jen sebou samým a jedničkou … tedy je to prvočíslo! A máme spor s naším předpokladem, že je pouze n prvočísel - našli jsme další, větší. Z toho plyne, že prvočísel nemůže být n pro žádné konečně velké n - je jich tedy nekonečně mnoho.

$\square$

Úloha 7. *Dokažte, že* $4\sqrt{5} + 1$ *je iracionální číslo.*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ